

"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

_____ А.А. Александров

" _____ " _____ 2015 г.

Типовой вариант задания по математике

олимпиады школьников «Шаг в будущее», (профиль «Математика»)

1. Один автомобиль проходит в минуту на 240 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 12,5 секунды меньше. На сколько метров первый автомобиль увеличивает расстояние от второго за время, пока второй проходит 1 км? (8 баллов)
2. Решите уравнение $2^x - 6 \cdot 2^{1-x} = 1$. (8 баллов)
3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{17} = 52$, $a_{30} = 13$? (8 баллов)
4. Найдите все целочисленные решения системы
$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{\pi y}{8} = \sqrt{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi y}{8} \cos \frac{\pi x}{4} - \cos \frac{\pi x}{4}}, \\ |x| + |y - 4| \leq 4, \quad y < x + 2. \end{cases}$$
 (8 баллов)
5. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 - 2x}}{2x + 5 - 2\sqrt{x^2 + 5x + 6}} \leq 0.$$
 (10 баллов)
6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = 3/(x^2 - 4x + 5)$. (10 баллов)
7. Площадь равнобокой трапеции равна 450. Окружность, построенная на боковой стороне трапеции как на диаметре, касается прямой, содержащей другую боковую сторону, и делит большее основание трапеции в отношении 24 : 25. Найдите стороны трапеции. (12 баллов)
8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1 + x - x^2$ и $y = 0,5(x^2 + 3)$ (12 баллов)
9. Определите все значения a , при которых уравнение $(x - a)^2 - 1 = 2(x + |x|)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a . (12 баллов)
10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними 30° . (12 баллов)

1. Пусть V м/сек – скорость первого автомобиля, тогда $V - 4$ – скорость второго. Тогда

$$\frac{1000}{V-4} = \frac{1000}{V} + 12,5; \quad \frac{80}{V-4} = \frac{80}{V} + 1; \quad V^2 - 4V - 320 = 0, \quad V = 2 \pm 18; \quad V_1 = 20, \quad V_2 = 20 - 4 = 16.$$

$$\Delta l = \frac{1000 \cdot 20}{16} - 1000 = 250.$$

Ответ: 250 м.

2. $2^x - 6 \cdot 2^{1-x} = 1, \quad (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0; \quad 2^x = (1 \pm 7)/2, \quad 2^x = 4, \quad x = 2.$

Ответ: $x = 2.$

3. Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} a + 16d = 52, \\ a + 29d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow d = -3, \quad a = 100.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n > 0$, а $a_{n+1} \leq 0$. Так как $a_n = a + d(n-1)$, то из неравенства $100 - 3(n-1) > 0$ найдем $n = [103/3] = 34$. Тогда $\max S_n = S_{34} = 0,5 \cdot (100 + 100 - 3 \cdot 33) \cdot 34 = 1717$.

Ответ: 1717.

4. Найдем все целочисленные решения системы
$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{\pi y}{8} = \sqrt{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi y}{8} \cos \frac{\pi x}{4} - \cos \frac{\pi x}{4}}, \\ |x| + |y - 4| \leq 4, \quad y < x + 2. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2} \cos \frac{\pi y}{8} = \sqrt{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi y}{8} \cos \frac{\pi x}{4} - \cos \frac{\pi x}{4}}$. При условии

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi y}{8} \geq 0, \text{ т.е. при } -4 + 16k \leq y \leq 4 + 16k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ имеем}$$

$$2 \cos^2 \frac{\pi y}{8} - 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi y}{8} \cos \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} = 0 \Leftrightarrow (2 \cos^2 \frac{\pi y}{8} - 1)(1 - \cos \frac{\pi x}{4}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{\pi y}{8} = 1$$

$$\text{или } \cos \frac{\pi x}{4} = 1 \Leftrightarrow y = 2 + 16k, \quad y = -2 + 16k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = 8n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Целочисленными решениями системы будут точки $(l; 2 + 16k), (l; -2 + 16k), (8n; m), l, k, n, m \in \mathbb{Z}$,

$-4 + 16s \leq m \leq 4 + 16s, s \in \mathbb{Z}$, лежащие в квадрате с центром в точке $(0; 4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y < x + 2$. Такими точками будут $(0; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 2)$.

Ответ: $(0; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 2)$.

5. Решим неравенство
$$\frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 - 2x}}{2x + 5 - 2\sqrt{x^2 + 5x + 6}} \leq 0.$$

ОДЗ числителя и знаменателя: $x(x+1) \geq 0, \quad 4 - 2x \geq 0, \quad x^2 + 5x + 6 \geq 0, \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-2; -1] \cup [0; 2].$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{x^2 + x - (4 - 2x)}{(x+3) - 2\sqrt{(x+3)(x+2)} + x + 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3) - 2\sqrt{(x+3)(x+2)} + x + 2} \leq 0.$$

Если $x \geq -2$, то приходим к неравенству $\frac{(x+4)(x-1)}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})^2} \leq 0$, и $x \in [-2; 1]$.

С учетом ОДЗ $x \in [-2; -1] \cup [0; 1]$.

Если $x \leq -3$, то приходим к неравенству $\frac{(x+4)(x-1)}{-(\sqrt{-x-3}+\sqrt{-x-2})^2} \leq 0$, и

$x \in (-\infty; -4]$, что входит в ОДЗ. Окончательно имеем $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [0; 1]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [0; 1]$.

6. Найдем множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 5}$.

Функция $g(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 5} = \frac{3}{(x-2)^2 + 1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0; 3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x = 2$, $g_{\max} = g(2) = 3$, на промежутке $(-\infty; 2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2; +\infty)$ — убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0; 9]$, поскольку $t = g(x) \in (0; 3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0; 9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9); g(2)] = [3/50; 3]$.

Ответ: $E_f = \left[\frac{3}{50}; 3 \right]$.

7. ABCD - равнобокая трапеция, $AB = CD$, $\angle A$ - острый, AB - диаметр окружности, M - центр окружности, P - точка касания окружности боковой стороны CD. Обозначим радиус окружности x . Тогда $AM = MB = MP = x$. Пусть N - середина стороны CD, тогда треугольник MPN прямоугольный,

$$\angle P = 90^\circ, \quad \angle MNP = \angle A = \alpha, \quad MN = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

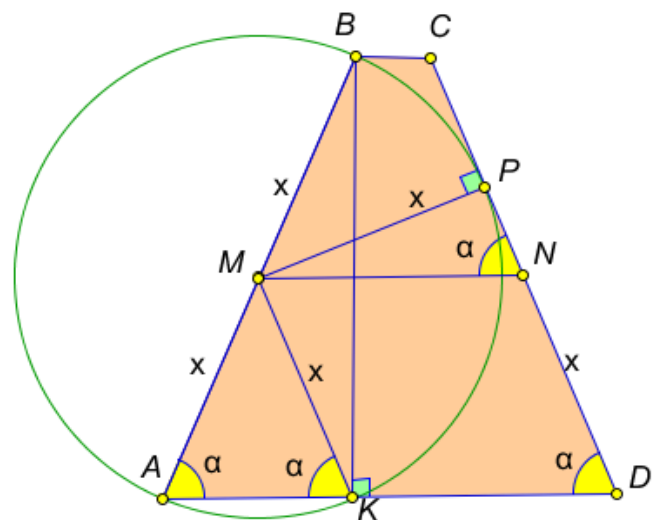
Пусть K - точка пересечения окружности с основанием AD ($K \neq A$). Треугольник ABK - прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$, BK - высота трапеции, $BK = AB \sin \alpha = 2x \sin \alpha$.

$$S_{ABCD} = MN \cdot BK = 2x^2 = 450 \Rightarrow x = 15,$$

$$AB = CD = 2x = 30.$$

$AK = AB \cos \alpha = 2x \cos \alpha$, KMND - параллелограмм, $KD = MN = \frac{x}{\sin \alpha}$.

$$\frac{AK}{KD} = \frac{24}{25} \Rightarrow 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm \frac{7}{25} \Rightarrow$$



$$1) \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{4}{5} \quad \text{или}$$

$$2) \sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

Для первого случая имеем: $AK = 2x \cos \alpha = 24$, $KD = \frac{x}{\sin \alpha} = 25$, $AD = AK + KD = 49$,
 $BC = 2MN - AD = 1$.

Для второго случая имеем: $AK = 2x \cos \alpha = 18$, $KD = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{75}{4}$, $AD = AK + KD = \frac{147}{4}$,
 $BC = 2MN - AD = \frac{3}{4}$.

Ответ: 1, 49, 30, 30 или $\frac{3}{4}, \frac{147}{4}, 30, 30$.

8. Составим уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1 + x - x^2$ и

$y = 0,5(x^2 + 3)$. Пусть $y = ax + b$ — уравнение общей касательной. Тогда

$$1 + x - x^2 = ax + b, \quad x^2 + (a-1)x + b - 1 = 0.$$

$$D = (a-1)^2 - 4b + 4 = 0, \quad a^2 - 2a - 4b + 5 = 0. \quad (*)$$

$$0,5(x^2 + 3) = ax + b, \quad x^2 - 2ax - 2b + 3 = 0.$$

$$D/4 = a^2 - (-2b + 3) = 0, \quad a^2 + 2b - 3 = 0. \quad (**)$$

Из (*) и (**) получаем $3a^2 - 2a - 1 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$. $b = \frac{3-a^2}{2}$, $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{13}{9}$.

Ответ: $y = x + 1$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{9}$.

9. Определим все значения a , при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2(x+|x|)$ имеет ровно два различных корня. Рассмотрим два случая.

I. $x \geq 0$, $(x-a)^2 - 1 = 4x$, $x^2 - 2(a+2)x + a^2 - 1 = 0$; $D/4 = a^2 + 4a + 4 - a^2 + 1 = 4a + 5$.

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a + 5}$, если

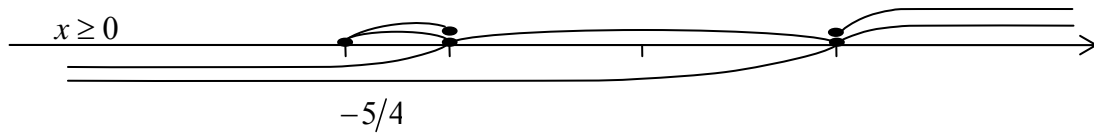
$$\begin{cases} 4a + 5 > 0, \\ a + 2 > 0, \\ a^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5/4, \\ a \leq -1, \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5/4 < a \leq -1, \\ a \geq 1. \end{cases}$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x_{1,2} = a + 2 + \sqrt{4a + 5}$, если

$$\begin{cases} D = 4a + 5 = 0, \\ a + 2 \geq 0, \\ a^2 - 1 < 0, \\ a^2 - 1 = 0, \\ a + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5/4, \\ a > -2, \\ -1 < a < 1, \\ a^2 - 1 = 0, \\ a + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5/4, \\ -1 < a < 1. \end{cases}$$

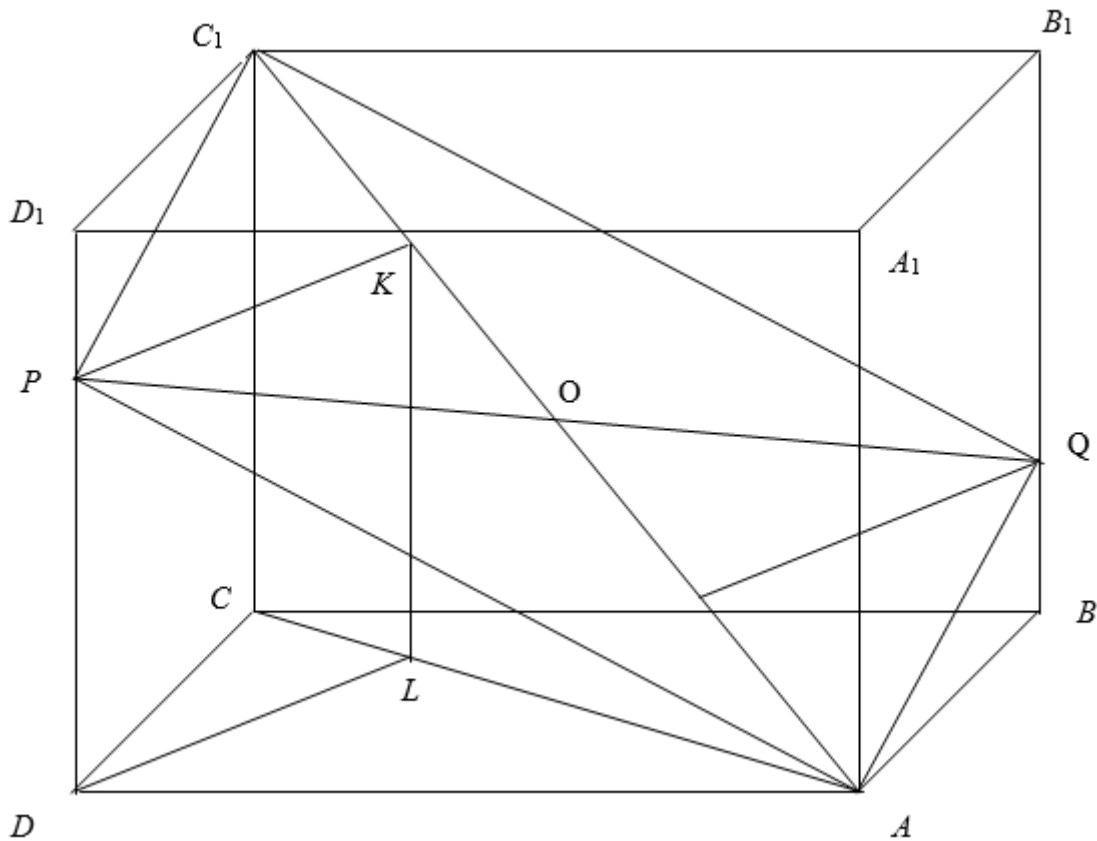
II. $x < 0$, $(x-a)^2 - 1 = 0$.

Корень $x_1 = a + 1 < 0$, если $a < -1$, и корень $x_2 = a - 1 < 0$, если $a < 1$, то есть, уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2} = a \pm 1$, если $-\infty < a < -1$, и уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x = a - 1$, если $-1 \leq a < 1$.



Ответ: $a \in (-\infty; -5/4)$, $x_{1,2} = a \pm 1$;
 $a \in (-1; 1)$, $x_1 = a - 1$, $x_2 = a + 2 + \sqrt{4a + 5}$;
 $a \in [1; +\infty)$, $x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a + 5}$.

10.



Проведем $DL \perp AC$, $LK \parallel CC_1$ ($K \in AC_1$), $PK \parallel DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ = PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1 – его большая, а PQ – меньшая диагонали, заданные в условии.

$$AC_1 = 3, PQ = \sqrt{3}, \varphi = 30^\circ, \sin \varphi = 1/2, \cos \varphi = \sqrt{3}/2.$$

$$DL = PK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad OK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \frac{3/2 - 3/4}{3/2 + 3/4} = \frac{1}{3}. \quad \text{Пусть } CL = x, \text{ тогда } AL = 3x, AC = 4x.$$

$$DL^2 = CL \cdot AL, \text{ т.е. } \frac{3}{16} = 3x^2, x = \frac{1}{4}, AC = 1. \quad CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Объем } V = AC \cdot DL \cdot CC_1 = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{6}/2$.