ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ЗАЧЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ
В 11 КЛАССЕ (ОДНОГОДИЧНИКИ)

Задачи типа 4 (приложение производной):

1. На прямой $y = x - 1$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные касательные к графику функции $f(x) = (x-1)^2$.
2. Вывести уравнения касательных к графику функции $f(x) = \dfrac{3}{x}$, проходящих через точку $A(1;-9)$.
3. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, катеты которого лежат на координатных осях, а гипотенуза является отрезком касательной к графику функции $f(x) = 3 - 0,25x^2$?
4. Найти промежутки убывания функции $f(x) = x \cdot \ln x$.
5. Найти все значения x, при которых функция $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x - \cos 2x$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Найдите эти значения.
6. Какой наименьший периметр может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин на графике функции $\sqrt{2y} = 4 - x$?
7. На плоскости $x0y$ прямые $y = x$ и $x = -1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через точку $M(0;4)$, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? Найдите эту площадь.
8. Найдите площадь треугольника AMB, если A и B – точки пересечения с осью $0x$ касательных, проведенных к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{8}\left(16 - x^2\right)$ из точки $M(3;4)$.
9. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y| = (x+2)(4-x)$, где $-2 < x < 4$, а стороны параллельны координатным осям?
10. Найти максимум функции $f(x) = (x-4)^2(x-1)$.
11. На каком наименьшем расстоянии от начала координат может находиться точка графика функции $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3x}{4}$?

12. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а его катеты лежат на на прямых $x=-2$ и $y=0$?
13. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а его катеты лежат на прямых $x=-2$ и $y=0$?
14. Определить, при каких p прямая $y=x-1$ будет касательной к графику функции $f(x)=p(x-1)-x^2$.
15. На графике функций $f(x)=4\sqrt{x}$ найдите точку, расстояние от которой до точки $M(13;0)$ будет наименьшим. Найдите это расстояние.
16. Составить уравнения касательных к графику функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в точках его пересечения с прямой $y=2x-1$.
17. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(2;-2)$ к параболе $f(x)=x^2+x+1$.
18. Какой наименьший периметр может иметь прямоугольник, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции $\sqrt{2y}=4-x$?
19. Найти наибольшее целое значение функции $f(x)=1{,}5\sqrt{25\cos^2 x+10\cos x+14}$.
20. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $f_1(x)=x^2+2$ и $f_2(x)=x^2+4x$.
21. Напишите уравнение касательной к графику функции $f\left(x\right)=-10-\sqrt[3]{3x-10}$ в точке с ординатой −9.
22. Найдите площадь треугольника, образованного касательными к графику функции $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-2x\right)$, проведенными из точки $M\left(3;-\dfrac{1}{2}\right)$, и отрезком, соединяющим точки касания.
23. Касательные к графикам функции $f\left(x\right)=2\sqrt{5x-11}$ и $g\left(x\right)=5\sqrt{2x+1}$, проведенные в точках графиков с одинаковыми абсциссами, параллельны. Напишите уравнения этих касательных.
24. Найдите точки минимума функции $y=x^3-2x\left|x-2\right|$, заданной на отрезке $\left[0;3\right]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

25. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = x + \sqrt{\left(x^2 + 6x + 9\right)\left(x^2 + 2x + 1\right)}$ на отрезке $\left[-4; -\frac{5}{4}\right]$.

26. Какой наименьший периметр может иметь прямоугольник, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна вершина – на графике функции $y = 3x + \frac{9}{x}$?

27. На графике функции $y = (x+2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до точки $M(16;0)$ будет наименьшим. Чему равно это расстояние?

28. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2 \frac{\sqrt{3}}{6}$, проходящими через точку $M(1; -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

29. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $y^2 = \left(1 + \cos 2x\right)$, $|x| \le \frac{\pi}{2}$, а стороны параллельны координатным осям?

30. На графике функции $y = \frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} + 5$ укажите точку A, чтобы площадь треугольника с вершинами A; O(0;0) и $B(8;2)$ была наименьшей. Найдите эту площадь.

Задачи типа 5 (уравнения и неравенства):

1. Решить уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 2\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right)$. Указать корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Решить неравенство $\log^2_{\frac{1}{3}} x - \log_3 x \ge 6$.
3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}}\left(2^{x+1} - 2\right) - \log_{\sqrt{2}}\left(4^x - 3\right) = 2$.
4. Решите уравнение $\frac{\cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x - \sin x} = 1$.
5. Решить уравнение $\sqrt{|x| - 1} = x - 3$.
6. Найти область определения функции $f(x) = \lg\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} + \lg\left(25 - x^2\right)$.
7. Решить уравнение $\sin x \cdot |\sin x| - \cos^2 x = 0$.

8. Решить уравнение $\cos x\cdot\left|\cos x\right|-\sin^2 x=0$.

9. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$.

10. Решить уравнение $\left|\operatorname{tg} x\right|\cdot\operatorname{ctg}\left|x\right|-1=0$.

11. Решить уравнение $\left|\operatorname{ctg} x\right|\cdot\operatorname{tg}\left|x\right|=1$.

12. Решить неравенство $\dfrac{2x^2-5x-5\left|x-3\right|+17}{x^2+x+2}\le 1$.

13. Решить неравенство $\sqrt{x^2-30x+125}\cdot\left(-x^2+2014-2013\right)\le 0$.

14. Решить неравенство $9^x+6\cdot 3^x\ge 11$. Указать наименьшее натуральное число, ему удовлетворяющее.

15. Решить уравнение $\sin x+\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(3x+\pi\right)$ и отобрать корни, лежащие на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$.

16. Решить уравнение $2\sin x+\sqrt{6\cos x}=0$ и отобрать корни, лежащие на отрезке $\left[-10;10\right]$.

17. Решить неравенство $3+\log_{\sqrt{3}} x\le\log_3(6x+1)$.

18. Решить уравнение $\sin 3x-\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=0$ и отобрать корни, лежащие в отрезке $\left[-10;8\right]$.

19. Решить неравенство $\lg\dfrac{x}{3}\le-\lg\left(x+2\right)$.

20. Решить неравенство $\left|x+1\right|+\left|x-1\right|\ge 3x-2$.

21. Решить уравнение $\sin x+\cos 4x=\sin 7x$ и отобрать корни, лежащие на отрезке $\left[-7;5\right]$.

22. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\left(x^4-1\right)\lg\dfrac{x}{2}}$.

23. Решить уравнение $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\sqrt{2}$ и отобрать все корни из промежутка $\left[-5;1\right]$.

24. Решите уравнение $\log_2\left(9-2x\right)=10^{\lg(3-x)}$.

25. Решить неравенство $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<1$.

26. Решите уравнение $5^{\frac{x}{2}}-5^{2-\frac{3x}{2}}=24\cdot 5^{-\frac{x}{2}}$.

27. Решите уравнение $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x\cdot(\cos x-\frac{2}{3})$.

28. Решите уравнение $x^{\log_x 6} \cdot 2^{\lg x} + x^{\lg 2} = 28.$

29. Решите уравнение $4^{\operatorname{tg}\frac{517\pi}{4} + \frac{1}{2}\lg x} - x^{\lg 2} = 24.$

30. Решите уравнение $9^{\cos\frac{5\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{1025\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{6} \cdot \lg x} - x^{\lg 3} = 18.$

Задачи типа 6 (стереометрическая задача):

1. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, а боковое ребро TA перпендикулярно плоскости основания. Найдите угол, который составляет высота BL грани TBC с плоскостью грани TAB, если $TB = 2\sqrt{3}$, а $BC = 3$.
2. Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды равновелико основанию. Найти площадь основания пирамиды, если ее боковое ребро равно 5.
3. Найдите угол, который составляет высота SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с плоскостью грани SCD, если боковое ребро пирамиды равно 8, а диагональ основания – $16\sqrt{2}$.
4. Куб с ребром, длина которого равна a, пересечен плоскостью, проходящей через середины трех ее ребер, выходящих из одной вершины. Найдите площадь сечения.
5. В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания a. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через одну из апофем?
6. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $\sqrt{6}$, радиус окружности, описанной около основания, равен $\sqrt{2}$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.
7. Все ребра треугольной призмы равны 4 см, а объем этой призмы равен 24 см^3. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.
8. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найти угол между смежными боковыми гранями пирамиды.
9. Три попарно касающихся шара, имеющих радиусы 9, 4 и 4 лежат на опорной плоскости. Определить угол между плоскостью, проходящей через центры данных шаров и опорной плоскостью.
10. Три шара, лежащие на одной опорной плоскости, касаются друг друга. Найти радиусы этих шаров, если они касаются опорной плоскости в вершинах треугольника со сторонами 3, 4 и 5.
11. Найти сторону основания правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $2\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине пирамиды – прямые.

12. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а сторона основания в два раза больше апофемы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через одну из апофем?
13. Найти площадь боковой поверхности прямой четырехугольной призмы, если известно, что одна из сторон основания равна 7 см, другая сторона основания равна 8 см, косинус угла между ними равен $\frac{2}{7}$, а боковое ребро призмы равно 11 см.
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны l, найти расстояние от точки A до прямой BC_1.
15. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами оснований равными a и b ($a > b$), и высотой h найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC.
16. В правильной шестиугольной пирамиде *MABCDEF*, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найти косинус угла между MB и AD.
17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой $_1$ и плоскостью $_{11}$.
18. В правильной шестиугольной пирамиде MABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 4, найти синус угла между прямой ~BC и плоскостью EMD.
19. Основанием пирамиды MABCD является трапеция ABCD($BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$). Найти объем пирамиды, если грани MBC и MCD перпендикулярны основанию, а ребро AM равно 2a.
20. Основанием пирамиды *MABCD* является трапеция ABCD($BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$). Найти объем пирамиды, если плоскость MAD перпендикулярна основанию, и грань MAD является равнобедренным прямоугольным треугольником.
21. Основанием пирамиды MABCD является трапеция ABCD($BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$). Найти объем пирамиды, если грани MAB и MCD перпендикулярны основанию, а плоскость MBC образует с плоскостью ABC угол 45 градусов.
22. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми и DF, где и F – точки, расположенные на ребрах CD и C_1D_1 так, что $DE = \frac{1}{3}$ DC, $C_1F = \frac{1}{3}C_1D_1$.

23. В правильной шестиугольной пирамиде *MABCDEF*, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найти косинус угла между *MB* и *AD*.
24. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми A_1D и D_1E, где E – середина ребра CC_1.
25. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти расстояние от точки C до плоскости BDC_1.
26. В тетраэдре ABCD, все ребра которого равны l ,найти расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.
27. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D до прямой AC.
28. Основанием пирамиды MABCD является трапеция ABCD ($BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$). Найти объем пирамиды, если все боковые ребра пирамиды равны 2,4a.

Задачи типа 7 (задача с параметром):

1. При каждом значении параметра a найти количество решений уравнения $|x+2|-|x-1|=a$.
2. При каждом значении параметра p найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases} |y| = x^2 - 2|x| + 1 \\ y = p \end{cases}$.
3. При каких значениях параметра a имеет решение уравнение $(x-4)^2 + x^2 - 4ax = 4 - 4a^2$?
4. При всех значениях параметра b решить неравенство $|x-b| < 3 - x^2$.
5. При всех значениях параметра p решить уравнение $|x-3|+1=(p-1)x$.
6. При каждом значении параметра a найти количество решений уравнения $(5-x)|x+1|=a$.
7. При всех значениях параметра b решить уравнение $|2x-3|+1=2(b-1)x$.
8. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $a+4-\frac{(x-a)^2}{4}=\log_2\left(17+15\frac{|x|}{x}\right)$ имеет два различных корня.
9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(5-a)\cdot 9^x - 5\cdot 3^x + \frac{10-5a}{8} = 0$ не имеет решений.

10. При каких значениях параметра a функция $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x+20}$ убывает на отрезке $[3a;a+3]$?

11. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a+2)x^2-(2a+4)x+7a+3>0$ выполняется при всех значениях x.

12. Найти все вещественные значения параметра a, при которых уравнение $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0<x<3$.

13. При всех значениях a решите уравнение $\dfrac{x}{2a+x}-\dfrac{2a+x}{x-2a}=\dfrac{16a^2}{4a^2-x^2}$.

14. При каких значениях m уравнение $\left(m^2-9\right)x=m^2+12m+27$ имеет хотя бы один корень, не превосходящий 1?

15. При всех p решите неравенство $\left(p^2-6p+8\right)x\le p-2$.

16. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$ выполняется при всех значениях x.

17. При всех значениях параметра a решите уравнение $a^2x+9a+15x=a^2+8ax+20$.

18. При каких значениях a неравенство $2x^2+4a^2x-a^2+1>0$ выполнено для всех х, не превосходящих по модулю единицы?

19. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2-2x\right)^2-(a+2)\left(x^2-2x\right)+3a-3=0$ имеет четыре различных решения?

20. При каких значениях параметра b уравнение $x^2-b|x|+b-1=0$ имеет три различных решения?

21. При каких значениях параметра a уравнение $x^4-(3a-1)x^2+2a^2-a=0$ имеет два различных решения?

22. При каких значениях параметра b уравнение $bx^2-(6b+1)x+9b+7=0$ имеет одно решение, большее или равное 0?

23. При каких значениях a уравнение $(a+1)x^2-4ax+4a+20=0$ не имеет отрицательных коней?

24. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2-(2a+1)x+a-1=0$ не имеет положительных корней?

25. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+4(a-1)x+4a-16=0$ имеет два различных корня меньше или равных 1?

26. При каких значениях параметра b уравнение $\left(b^2+8b+15\right)x=b^2-b-30$ не имеет корней, превышающих 77?

27. При каких значениях параметра p уравнение $\left(p^2-7p-18\right)x=p^2+13p+22$ имеет хотя бы один корень и все корни уравнения меньше -4?

28. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x+a)^2+2a=\dfrac{7x-9|x|}{x-|x|}$ имеет единственное решение, и решите его при каждом a.

29. При каждом значении параметра a найти количество решений уравнения $a-1=\big|x+2-|x-3|\big|$.

30. При каждом значении параметра a найти количество решений уравнения $a+2=\big||2x+2|+x-1\big|$.