

**«УТВЕРЖДАЮ»**  
Заведующий кафедрой «Основы  
математики и информатики»,  
д-р. техн. наук, профессор  
\_\_\_\_\_ С. С. Граськин.  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
Специализированный учебно-научный центр  
Государственное бюджетное образовательное учреждение города Москвы  
лицей № 1580 (при МГТУ им. Н. Э. Баумана)  
Кафедра «Основы математики и информатики» (СУНЦ-1)*

## ВОПРОСЫ К ЗИМНЕМУ ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИКЕ (ОДНОГОДИЧНИКИ) 2013—2014 учебный год

### 1 Основы теории множеств

1. Понятие множества. Элемент множества. Характеристическое свойство множества. Способы задания множеств. Привести примеры.
2. Конечное и бесконечное множества. Упорядоченное множество (кортеж). Пустое множество.
3. Понятия подмножества и универсального множества. Равные множества. Графическое изображение множеств. Привести примеры.
4. Операция пересечения двух множеств. Свойства. Привести примеры.
5. Операция разности двух множеств. Привести примеры.
6. Операция объединения двух множеств. Свойства. Привести примеры.
7. Операция дополнения множества. Привести примеры. Законы де Моргана.
8. Порядок выполнения операций над множествами. Применение диаграмм Эйлера-Венна при доказательстве тождеств, содержащих различные операции над множествами. Привести примеры.
9. Понятия системы и совокупности через множества. Привести примеры. Определение модуля числа. Свойства модуля.
10. Упорядоченная пара. Декартово произведение двух множеств. Привести примеры. Декартов квадрат. Свойства декартова произведения.
11. Промежутки числовых множеств. Понятие окрестности точки и проколотой окрестности точки.
12. Множество, ограниченное сверху. Точная верхняя грань. Множество, ограниченное снизу. Точная нижняя грань. Ограниченное множество.
13. Соответствие между множествами. Способы задания. Граф и график соответствия. Понятия полного образа и полного прообраза элемента.
14. Операция инверсии. Обратное соответствие.
15. Типы соответствий. Примеры графов и характеристических свойств. Равномощные множества.

16. Функциональное соответствие. Обозначение функции. Область определения и область значений функции. Понятия аргумента функции и значения функции. Способы задания функций.

## 2 Свойства функций

17. Четная функция. Нечетная функция. Функция общего вида. Привести примеры. Теоремы о графиках четной/нечетной функций. Арифметические теоремы о четных/нечетных функциях.
18. Периодическая функция с периодом  $T$ . Основной период функции. Доказать теорему о периоде: всякий период функции кратен ее основному периоду. Теорема о периоде функции  $f(kx)$  по периоду функции  $y = f(x)$ . Привести примеры. Сформулировать теорему о периоде алгебраической суммы, произведения и отношения периодических функций.
19. Возрастающая (неубывающая) функция. Убывающая (невозрастающая) функция. Монотонные и строго монотонные функции. Привести примеры. Промежутки монотонности.
20. Понятия точки минимума и точки максимума. Локальные экстремумы. Наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке. Привести примеры.
21. Использование свойства монотонности функций при решении уравнений вида:  $f(x) = a$ ,  $f(x) = g(x)$ ,  $f(\varphi_1(x)) = f(\varphi_2(x))$ . Привести примеры.
22. Ограниченные функции. Использование свойства ограниченности функций при решении уравнений. Привести примеры.
23. Обратная функция к заданной. Привести примеры. Достаточное условие обратимости функции. Свойство графиков взаимно обратных функций. Критерий (необходимое и достаточное условие) обратимости функций.
24. Сложная функция (суперпозиция). Пояснение суперпозиции диаграммой Эйлера-Венна. Промежуточный аргумент сложной функции. Привести примеры.

## 3 Основные элементарные функции

25. Перечислите все основные элементарные функции. Элементарные функции. Привести примеры элементарных и неэлементарных функций.
26. Общая схема исследования функций.
27. Линейная функция. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, график линейной функции. Свойства линейной функции.
28. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в прямоугольной декартовой системе координат.
29. Вывод выражения для угла между прямыми.

30. Общее уравнение прямой. Частные случаи.
31. Вывод уравнения прямой, проходящей через две точки, и уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
32. Вывод уравнения прямой в отрезках, прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
33. Вывод нормального уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой в прямоугольной декартовой системе координат.
34. Кусочно-линейные функции (модуль, сигнум, целая часть, дробная часть): определения, свойства, графики.
35. Квадратичная функция. Теорема о каноническом виде квадратичной функции (с доказательством). График квадратичной функции. Вершина параболы. Квадратное уравнение и его корни (с выводом).
36. Приведенное квадратное уравнение и его корни. Теорема Виета: прямая и обратная (с доказательством).
37. Понятие угла на плоскости. Градусная мера и радианная мера угла. Теорема об отношении длины дуги к радиусу окружности. Теорема о соответствии всякого действительного числа радианной мере угла.
38. Единичная тригонометрическая окружность. Утверждения для координат точки, образованной при повороте луча на углы  $\alpha \pm 2\pi$ ,  $\alpha + \pi$ ,  $-\alpha$ ,  $(\pi - \alpha)$ . Основное тригонометрическое тождество. Следствия из него.
39. Функция  $f(x) = \sin x$ : определение, график, свойства.
40. Функция  $f(x) = \operatorname{tg} x$ : определение, график, свойства.
41. Функция  $f(x) = \cos x$ : определение, график, свойства.
42. Функция  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ : определение, график, свойства.
43. Дайте определение арксинуса действительного числа  $a$ . Почему этот угол принадлежит отрезку  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ? Постройте график функции  $y = \arcsin x$ . Укажите свойства этой функции. Используя график функции, решите неравенство  $\arcsin x < \frac{\pi}{6}$ .
44. Дайте определение арккосинуса действительного числа  $a$ . Почему этот угол принадлежит отрезку  $[0; \pi]$ ? Постройте график функции  $y = \arccos x$ . Укажите свойства этой функции. Используя график функции, решите неравенство  $\arccos x < \frac{\pi}{4}$ .
45. Дайте определение арктангенса действительного числа  $a$ . Постройте график функции  $y = \operatorname{arctg} x$ . Укажите свойства этой функции. Используя график функции, решите неравенство  $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{3}$ .
46. Дайте определение арккотангенса действительного числа  $a$ . Постройте график функции  $y = \operatorname{arcctg} x$ . Укажите свойства этой функции. Используя график функции, решите неравенство  $\operatorname{arcctg} x > \frac{\pi}{6}$ .
47. Степенная функция  $f(x) = x^\alpha$ . Начертите примеры графиков и ука свойства полученных функций для отдельных случаев показателя степени  $\alpha$ : а)  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , б)  $\alpha$  – отрицательное целое число, в)  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Свойства

степеней.

48. Показательная функция  $f(x) = a^x$ : определение, графики, свойства при  $a \in (0; 1)$  и  $a > 1$ . Алгебраические свойства показательной функции.
49. Схема решения уравнений вида  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  и неравенств вида  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ .
50. Понятие логарифма числа  $c$  по основанию  $a$ . Натуральные и десятичные логарифмы.
51. Основные теоремы о свойствах логарифмов: логарифм произведения, логарифм частного, логарифм степени по степенному основанию.
52. Определение логарифмической функции  $f(x) = \log_a x$ , свойства, график.
53. Основное логарифмическое тождество.
54. Теорема о переходе к новому основанию.
55. Схема решения уравнений вида  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ .
56. Схема решения неравенств вида  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  и  $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ .

#### 4 Числовые последовательности

57. Понятие о числовой последовательности. Способы задания.
58. Свойства последовательностей: ограниченность, монотонность. Определить характер монотонности последовательности с общим членом  $x_n = \frac{2^n}{n!}$ .
59. Арифметическая и геометрическая прогрессии как частные случаи числовых последовательностей: определение, теорема об общем члене и сумме  $n$  первых членов, признак прогрессии.
60. Определение предела последовательности. Символьная запись определения на «языке  $\varepsilon - \delta$ ». Доказать (найти  $N(\varepsilon)$ ), что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$ . Геометрический смысл предела последовательности.
61. Теорема о пределе постоянной последовательности (с доказательством).
62. Теорема о единственности предела последовательности (с доказательством).
63. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности (с доказательством).
64. Теоремы об арифметических операциях над последовательностями и их пределах: сумма (разность) последовательностей, произведение последовательностей, частное последовательностей (с доказательством).
65. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
66. Теорема о «зажатой» последовательности.
67. Второй замечательный предел для последовательностей (с доказательством существования предела). Число  $e$ . Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n-1} \right)^n$ .

## 5 Предел функции

68. Определение предела функции по Гейне. Символьная запись определения на «языке  $\varepsilon - \delta$ ».
69. Определение предела функции по Коши. Символьная запись определения на «языке  $\varepsilon - \delta$ ». Геометрический смысл предела функции. Привести примеры.
70. Понятия о  $\delta$ -полуокрестностях и  $\delta$ -полуокрестностях точки. Левосторонний и правосторонний пределы функции. Необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке.
71. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел (с доказательством).
72. Бесконечно малая функция: определение, значение предела.
73. Теорема о сумме двух бесконечно малых функций (с доказательством). Привести примеры.
74. Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию (с доказательством). Следствия из теоремы.
75. Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой (с доказательством).
76. Бесконечно большая функция: определение, значение предела.
77. Теоремы о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций (с доказательством).
78. Теоремы об арифметических операциях над функциями и их пределах: сумма (разность), произведение, частное. Следствия.
79. Теорема о сохранении знака функции пределом.
80. Теорема о предельном переходе в неравенстве для функций.
81. Теорема о «зажатой» функции.
82. Первый замечательный предел (с доказательством). Следствия. Привести примеры.
83. Второй замечательный предел. Следствия (с доказательством). Привести примеры.
84. Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций. Теорема о сумме бесконечно малых различных порядков.

## 6 Непрерывность функции

85. Определение непрерывной функции в точке, на интервале, на отрезке.
86. Точки разрыва и их классификация.
87. Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями (с доказательством).
88. Теорема о непрерывности сложной функции.
89. Понятие приращения аргумента и приращения функции. Определение непрерывной функции через приращения.

90. Непрерывность основных элементарных функций. Привести примеры (не менее двух). Теорема о непрерывности элементарных функций.
91. Основные теоремы о непрерывных функциях: первая и вторая теоремы Больцано-Коши, первая и вторая теоремы Вейерштрасса (геометрический смысл).

## 7 Производная функции и ее приложения

92. Определения производной функции в точке: по Ньютону, по Лейбницу, по Коши, по Фреше. Механический смысл производной функции. Привести примеры вычисления производной функции в точке по определению.
93. Геометрический смысл производной функции в точке. Уравнение касательной к графику функции (с доказательством). Уравнение нормали.
94. Теорема о дифференцируемости непрерывной функции в точке (с доказательством).
95. Односторонние производные функции в точке. Необходимое и достаточное условие существования производной в точке. Привести примеры.
96. Дифференцирование функций. Найти, используя определение, производные функций:  $f(x) = c$ ,  $f(x) = x^\alpha$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $f(x) = a^x$ .
97. Теорема о производной суммы дифференцируемых функций (с доказательством). Привести примеры.
98. Теорема о производной произведения двух дифференцируемых функций (с доказательством). Привести примеры. Следствие о постоянном множителе.
99. Теорема о производной частного двух дифференцируемых функций (с доказательством). Привести примеры.
100. Теорема о производной сложной функции (с доказательством). Привести примеры.
101. Теорема о производной обратной функции (с доказательством). Привести примеры.
102. Таблица производных основных элементарных функций.
103. Дифференцирование функций, заданных неявно. Логарифмическое дифференцирование. Привести примеры.
104. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Привести примеры.
105. Правило Лопиталя для вычисления пределов отношения двух непрерывно-дифференцируемых функций. Привести примеры.
106. Угол между кривыми: определение, формула.
107. Асимптоты графика функции. Горизонтальная асимптота. Вертикальная асимптота. Формулы для углового коэффициента и свободного члена наклонной асимптоты (с доказательством).
108. Теорема Ферма и ее геометрический смысл.

109. Теорема Ролля и ее геометрический смысл.
110. Теорема Лагранжа и ее геометрический смысл. Формула конечных приращений.
111. Теорема Коши и ее геометрический смысл.
112. Необходимое условие возрастания (убывания) функции (с доказательством). Привести примеры.
113. Критические и стационарные точки функции. Локальные экстремумы как точки смены монотонности графика функции. Необходимое условие экстремума. Первое достаточное условие экстремума.
114. Вторая производная функции в точке. Выпуклость графика и точки перегиба. Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции. Достаточное условие точки перегиба. Второе достаточное условие экстремума.

*Составил учитель математики Мораренко В. В.*