Предел функции (продолжение)

Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Рассмотрим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и покажем, что $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to +\infty$.

Из определения $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ имеем, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0\ \forall x > x_0\ |f(x) - b| < \varepsilon$, но так как $\alpha(x) = f(x) - b$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0\ \forall x > x_0\ |\alpha(x)| < \varepsilon$, а это означает, что $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to +\infty$.

Итак, из равенства $\alpha(x) = f(x) - b$ имеем $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to +\infty$.

5.7 Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. функции при $x \to a$ ($x\to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0$, ...). Рассмотрим предел их отношения при $x \to a$.

1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b$ и b – конечное число, $b \neq 0$, то функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ называются бесконечно малыми ***одного порядка малости*** при $x \to a$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой ***высшего порядка***, чем $\beta(x)$ при $x \to a$. Очевидно, в этом случае $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$.

3. Если $\alpha(x)$ – б.м. высшего порядка, чем $\beta(x)$, и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = b \neq 0$ (b – конечное число, $k \in$ ***N***), то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой k-го порядка, по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to a$.

4. Если не существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ (ни конечный, ни бесконечный), то $\alpha(x)$, $\beta(x)$ называют ***несравнимыми*** б.м. при $x \to a$.

5. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$, $\beta(x)$ называются ***эквивалентными*** б.м. при $x \to a$, что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций (при $x \to 0$)

$\sin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\log_a x \sim \dfrac{x}{\ln a}$
$\arcsin x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$(1+x)^m \sim 1 + m\cdot x$

Пример 1. $\alpha(x) = (1 - x)^3$, $\beta(x) = 1 - x^3$.

Очевидно, что при $x \to 1$ функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ являются б.м. Для их сравнения найдем предел их отношения при $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{1+x+x^2} = 0$$

Вывод: $\alpha(x)$ является б.м. высшего порядка, по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to 1$.

Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^3} = \dfrac{1}{27}$ (убедитесь!), откуда следует, что $\alpha(x)$ – б.м. 3-го порядка малости, по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to 1$.

Пример 2. Функции $\alpha_1(x) = 4x$, $\alpha_2(x) = x^2$, $\alpha_3(x) = \sin x$, $\alpha_4(x) = \mathrm{tg}\, x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Сравним их:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} = \frac{1}{4},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha_4(x)}{\alpha_3(x)} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)} = \infty.$$

Отсюда заключаем, что $\alpha_2(x) = x^2$ – б.м. высшего порядка, по сравнению с $\alpha_1(x)$ и $\alpha_3(x)$ (при $x \to 0$), $\alpha_1(x)$ и $\alpha_3(x)$ – б.м. одного порядка, $\alpha_3(x)$ и $\alpha_4(x)$ – эквивалентные б.м., т.е. $\sin x \sim \mathrm{tg}\, x$ при $x \to 0$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\mathrm{tg}\, 3x}$.

В силу первого замечательного предела $\sin 4x \sim 4x$, $\mathrm{tg}\, 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\mathrm{tg}\, 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

Теорема. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны (при $x \to a$) тогда и только тогда, когда $\alpha(x) - \beta(x)$ является б.м. высшего порядка, по сравнению с $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ (при $x \to a$).

Доказательство

Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 0$, т.е. разность $\alpha(x) - \beta(x)$ – б.м. высшего порядка, по сравнению с $\alpha(x)$ при при $x \to a$ (аналогично с $\beta(x)$).

Пусть $\alpha(x) - \beta(x)$ – б.м. высшего порядка, по сравнению с $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, покажем, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(\alpha(x)-\beta(x))+\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} + \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta(x)} = 1,$$

т.е. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых различных порядков). Сумма конечного числа бесконечно малых различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ – б.м. низшего порядка по сравнению с $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0$.

Покажем, что $\alpha(x) \sim (\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x))$ при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} + \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Доказанные теоремы применяются для нахождения пределов.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+3\operatorname{tg}5x+x^3}{4x+2x^3}$.

По теореме 3 при $x\to 0$: $4x+2x^3\sim 4x$, $\sin^2 x+3\operatorname{tg}5x+x^3\sim 3\operatorname{tg}5x$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+3\operatorname{tg}5x+x^3}{4x+2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}5x}{4x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x}=\frac{15}{4}.$$

6 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

6.1 Понятия о непрерывных функциях

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, то функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, а x_0 называется ***точкой непрерывности функции*** $f(x)$.

На языке $\varepsilon-\delta$ равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ описывается формулой:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Используя понятия односторонних пределов, можно перефразировать определение так: функция называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, если существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Иногда приходится рассматривать непрерывность функции в точке x_0 справа или слева. Пусть функция определена в точке x_0 и некоторой ее левой полуокрестности.

Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 ***слева.***

Аналогично определяется непрерывность ***справа***.

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала $(a,\ b)$, то говорят, что $f(x)$ ***непрерывна на интервале*** $(a,\ b)$.

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ непрерывна на интервалах $(-\infty,\ 3)$ и $(3,\ +\infty)$, так как при $x_0\neq 3$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\dfrac{1}{x_0-3}=f(x_0)$.

Определение. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$, непрерывна в каждой точке интервала $(a,\ b)$, в точке a непрерывна справа, в точке b непрерывна слева, то говорят, что функция $f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a,\ b]$.

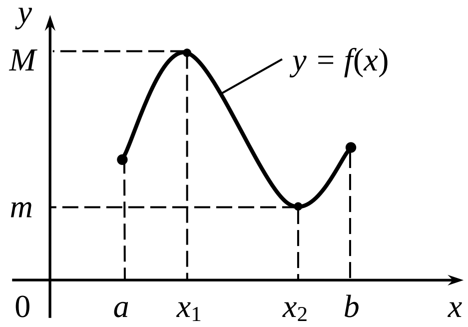


Рис. 1.15

Другими словами, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, если выполнены три условия:

1) $\forall x_0\in(a,\ b)$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$;

3) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

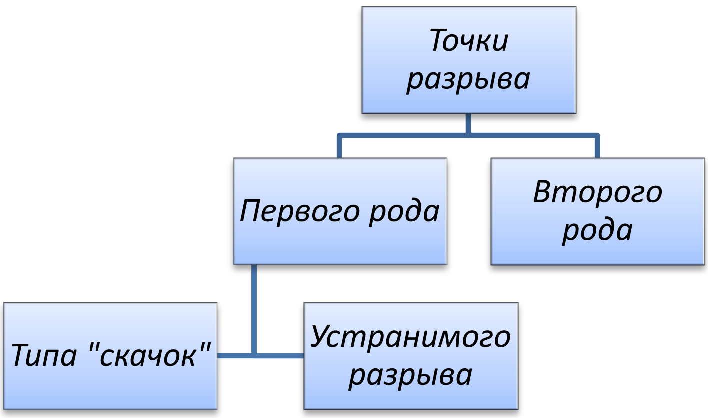
6.2 Точки разрыва и их классификация

Определение. Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, но может быть не определена в x_0. Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** для функции $f(x)$, если в точке x_0 функция $f(x)$ не определена, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Определение. Точка разрыва x_0 для функции $f(x)$ называется ***точкой разрыва первого рода***, если существуют (конечные) пределы: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. В противном случае x_0 – ***точка разрыва второго рода***.

Определение. Точка x_0 разрыва первого рода, для которой $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, называется ***точкой устранимого разрыва***. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то такая точка разрыва называется точкой разрыва типа «скачок», где модуль разности $\left|\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right|$ и называется «скачком».

Пример. Если рассмотреть функцию $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$, то $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\varphi(0) = 1$. Доопределив функцию в точке $x_0 = 0$, мы устранили разрыв.



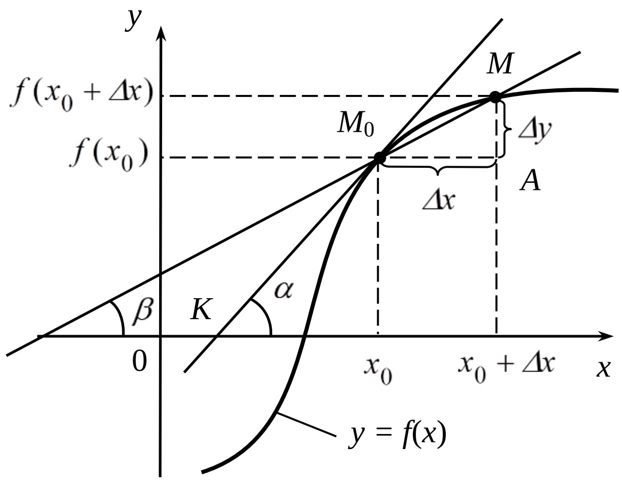


Рис. к разд. 6.3

6.3 Приращения функции и аргумента

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, x – точка из этой окрестности. Введем обозначения: разность $x - x_0$ обозначим через Δx и назовем ***приращением аргумента***, а разность $f(x) - f(x_0)$ обозначим через Δy и назовем ***приращением функции***.

Итак, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Из равенства $\Delta x = x - x_0$ получаем равенство $x = x_0 + \Delta x$, тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение (непрерывность функции через приращения). Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

6.4 Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $f_2(x_0) \neq 0$, то частное $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ также непрерывно в точке x_0.

Доказательство. Доказательство основано на свойствах пределов. Докажем, например, что сумма непрерывных функций непрерывна. Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$. Применяя теорему о пределе суммы двух функций, получим:

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0),$$

что означает непрерывность $f_1(x) + f_2(x)$ в точке x_0. Аналогично для других утверждений теоремы. Заметим, что формулу $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (определяющую непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0) можно записать в виде: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. Эта формула означает, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$. Действительно, из непрерывности функции $\varphi(x)$ имеем: $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. при $x \to x_0$ следует, что $u \to u_0$. Далее, из непрерывности функции $f(u)$ получаем:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Установим непрерывность некоторых элементарных функций:

1. Всякая постоянная функция $y = C$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in R$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

2. Функция $y = x$ непрерывна в любой точке x_0, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. Тогда функция $y = Cx^n$, где $n \in \mathbf{N}$, непрерывна на всей числовой оси, как произведение непрерывных функций.

3. Любой многочлен: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, непрерывен в каждой точке числовой оси, как сумма непрерывных функций.

4. Всякая рациональная дробь, являющаяся отношением двух многочленов $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, непрерывна во всех точках, в которых многочлен $Q(x)$ не обращается в 0.

5. Функция $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны в точке $x_0 = 0$, так как

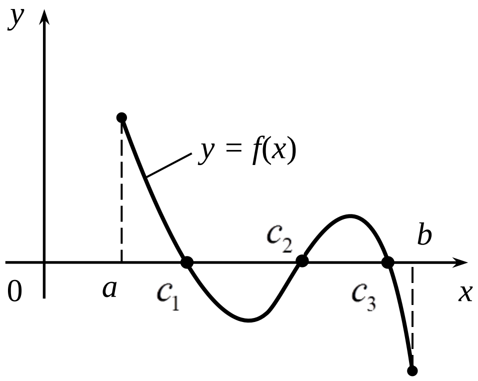
$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0,\ \sin 0 = 0,\ \lim_{x\to 0} \cos x = 1,\ \cos 0 = 1, \text{ т.е. } \lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 \text{ и } \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0$$

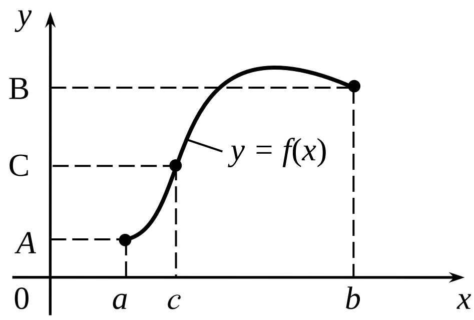
Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема (о непрерывности элементарных функций). Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

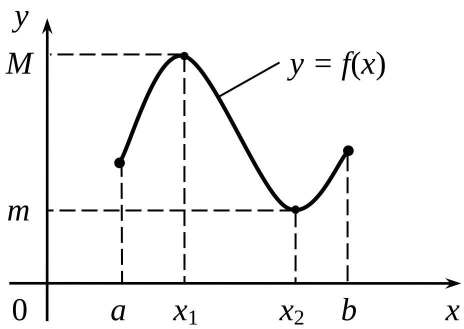
Теорема (первая теорема Больцано-Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется хотя бы одна точка c, в которой $f(c)=0$.

Теорема (вторая теорема Больцано-Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке. Если в двух точках a и b $f(x)$ принимает неравные значения A и B, то каково бы ни было число $C\in(A;B)$, найдется такая точка $c\in(a;b)$, что $f(c)=C$.





Теорема (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция является ограниченной на этом отрезке, то есть $\forall x\in[a;b]\ \exists\, m, M:\ m\le f(x)\le M$.



Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.