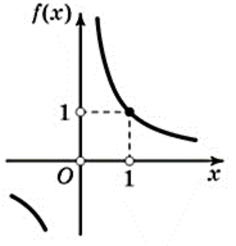
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

ЛЕКЦИЯ ЛЕТНЕГО ИНТЕНСИВНОГО КУРСА

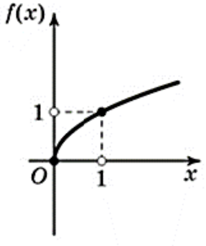
ГОУ ЛИЦЕЙ № 1580 (ПРИ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА)

Основные элементарные функции

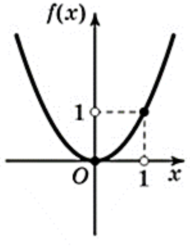
- *Степенная функция*



$f(x) = 1/x = x^{-1}$

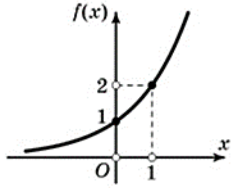


$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

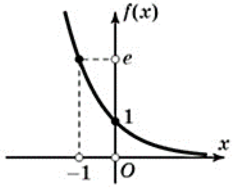


$f(x) = x^2$

- *Показательная функция*

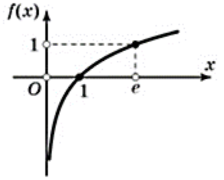


$f(x) = 2^x$



$f(x) = e^{-x} = (1/e)^x$

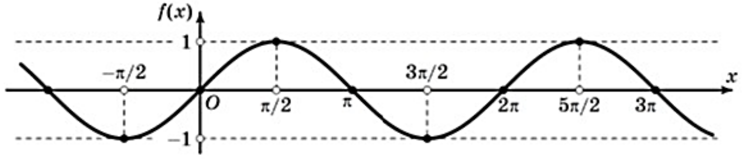
- *Логарифмическая функция*



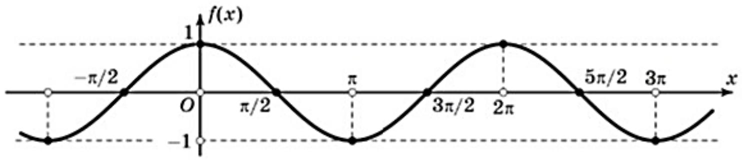
$f(x) = \ln x = \log_e x$

$f(x) = \log_{10} x$

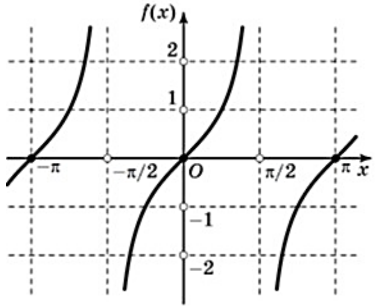
- *Тригонометрические функции*



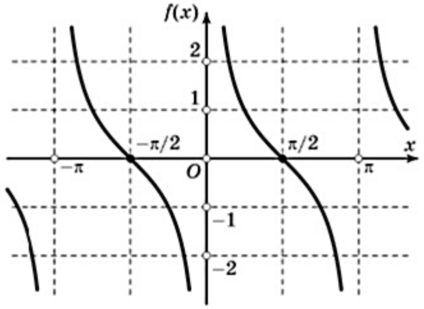
$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$

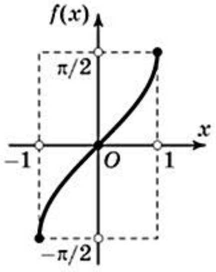


$f(x) = \operatorname{tg} x$

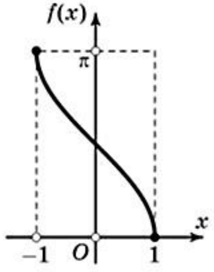


$f(x) = \operatorname{ctg} x$

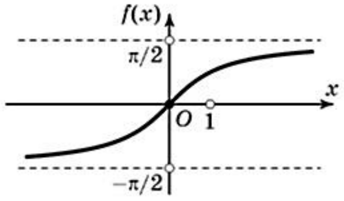
- *Обратные тригонометрические функции*



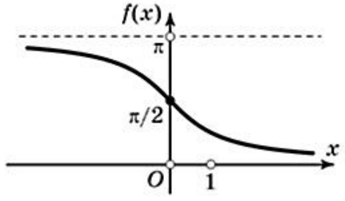
$f(x) = \arcsin x$



$f(x) = \arccos x$

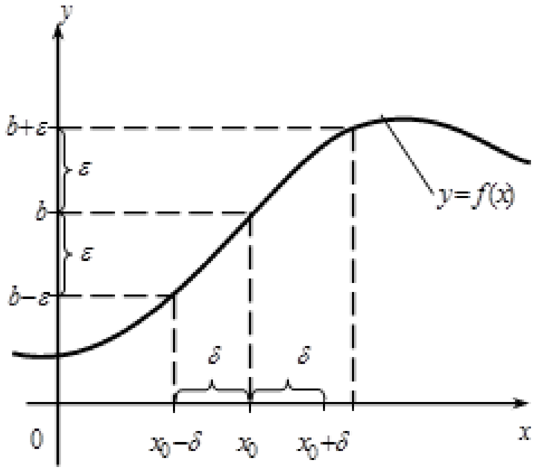


$f(x) = \operatorname{arctg} x$



$f(x) = \operatorname{arcctg} x$

Предел функции в точке.
Приращение аргумента и приращение функции.



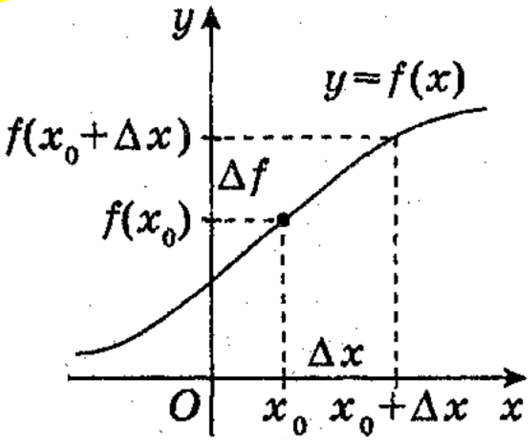
Число b называется ***пределом функции f(x) в точке*** x_0 (при стремлении x к x_0), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое, что для любого $x \neq x_0$ и удовлетворяющему неравенству: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Символически $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ означает:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq x_0\ (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, x – точка из этой окрестности. Введем обозначения: разность $x - x_0$ обозначим через Δx и назовем ***приращением аргумента***, а разность $f(x) - f(x_0)$ обозначим через Δy и назовем ***приращением функции***.

Итак, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Из равенства $\Delta x = x - x_0$ получаем равенство $x = x_0 + \Delta x$, тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



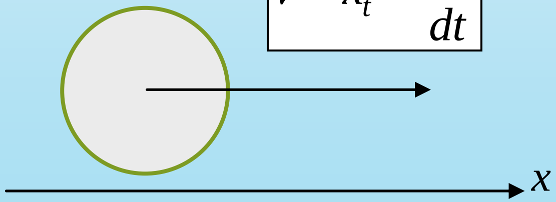
Понятие производной функции

- ***Исаак Ньютон***

(физическое толкование):

Производная – это скорость движущегося тела в данный момент времени

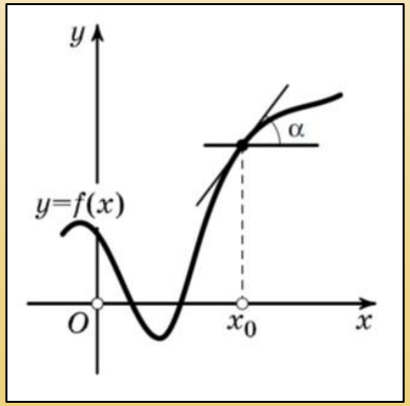
$$v = \dot{x}_t = \frac{dx}{dt}$$



- ***Готфрид Вильгельм Лейбниц***

(геометрическое толкование):

Производная функции в точке – это тангенс угла наклона касательной к графику этой функции в данной точке



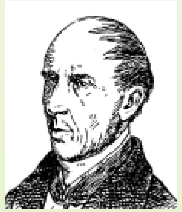
$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$$

Уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- ***Огюстен Луи Коши***

(аналитическое толкование):



Производная функции f(x) в точке x_0 – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Производные основных элементарных функций

Пример 1. Найти производную для функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 3$.

Решение

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6\,.$$

Задание 1. Найти производную для функций в заданных точках:

$a)\ f(x) = -5x^3;\quad x_0 = 1$ $\qquad$ $в)\ f(x) = \sqrt{x};\quad x_0 = 4$

$б)\ f(x) = \frac{1}{x};\quad x_0 = 3$ $\qquad$ $г)\ f(x) = \sin x;\quad x_0 = \pi$

Ответы:

$a)\ -15$

$б)\ -\frac{1}{9}$

$в)\ \frac{1}{4}$

$г)\ -1$

Производные основных элементарных функций

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Дифференцирование

Для одной и той же функции $f(x)$ производную можно вычислять в различных точках x, и ее значения будут зависеть от x, т.е. производная $f'(x)$ будет функцией от x, ее называют ***производной функцией от функции*** $f(x)$. Нахождение производной функции называют ***дифференцированием функции*** $f(x)$.

$$\boxed{f'(x_0) \quad \rightarrow \quad f'(x) \quad \rightarrow \quad y' = y_x' = y'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

Различные формы записи производной

Дифференцирование

Основные правила

1. $(u(x) + v(x))' = u'(x)+v'(x)$
2. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
3. Если $v(x) \neq 0$, то
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$
4. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в точке u ($u = \varphi(x)$), то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ в точке x имеет производную y'_x, причем $y'_x = y'_u u'_x$.
5. Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, непрерывна, монотонна (возрастает или убывает) и дифференцируема на X. Если ее производная y'_x в точке x не равна 0, то обратная функция $x = \varphi(y)$ имеет производную x'_y в точке y ($y = f(x)$), причем $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

Производная **суммы (разности)** дифференцируемых функций

Производная **произведения** двух дифференцируемых функций

Производная **частного** двух дифференцируемых функций

Производная **сложной функции**

Производная **обратной функции** к данной

Практические задания

1. *Точка движется прямолинейно по закону* $s(t)=t^2-4t.$

   а) Выразите скорость точки как функцию времени.

   б) Вычислите скорость точки в момент времени t = 5.

   в) В какой момент времени скорость была равна нулю?

2. *Найдите производную функции в любой точке:*

   а) $y=-x^3+5x^2-8x+13$

   б) $y=(2x+3)^3$

   в) $y=\dfrac{x^2+x-7}{x^2+1}$

   г) $y=\dfrac{3^x}{3^x+9^x}$

   д) $y=x^{25}\cdot 4\cos x-2\sqrt{x}$

   е) $y=\ln x-\sin x$

   ж) $y=(\operatorname{ctg} x)^5$

   з) $y=\sqrt{4x^2-5x+1}$

   и) $y=\sqrt[17]{\sin^2 7x+\cos^2 7x}$

Контрольные вопросы

- *Как вычисляют производную функции в точке?*
- *В чем заключается механический смысл производной?*
- *В чем заключается геометрический смысл производной?*
- *Сформулируйте теорему о производной суммы? произведения? частного?*
- *Как вычислять производную сложной функции?*
- *Как связаны производные взаимно обратных функций?*