

Домашнее задание по теме: «**Функции. Свойства функций**»

**Задача 1.** Найдите площадь фигуры, координаты  $(x; y)$  точек которой удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} y - x \geq 0 \\ y + x \geq 0 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 2 \end{cases} ; & \text{в) } \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 4y \leq -6 \\ x \leq 2 \end{cases} ; \\ \text{б) } \begin{cases} |x - y| \leq 2 \\ |x + y| \leq 2 \end{cases} ; & \text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y + 1 \geq 0 \\ 3y + 6 \geq 2|x| \end{cases} ; \\ & \text{д) } x^2 + y^2 \leq |8x|. \end{array}$$

**Задача 2.** Найти промежутки монотонности функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = \frac{4x+3}{4x+1}; & \text{в) } f(x) = \sin 2x; \\ \text{б) } f(x) = 0,5^{x-1}; & \text{г) } f(x) = 3 - |x+1|. \end{array}$$

**Задача 3.** Найти все четные и все нечетные функции в зависимости от параметров  $a, b, c$  среди данных: а) квадратичных функций  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; б) функций вида  $f(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ .

**Задача 4.** Найдите период следующих функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = \sin 3x + 2\cos 5x; & \text{в) } f(x) = \cos^2 3x. \\ \text{б) } f(x) = \sin\left(\frac{4}{5}x\right) + 3\cos\left(\frac{7}{8}x\right) + \cos(5x); & \end{array}$$

**Задача 5.** Известно, что  $f(x)$  – периодическая функция с периодом 2 и  $f(x) = x^2 - 3x$  при  $-1 \leq x \leq 1$ . Написать формулу для  $f(x)$  на промежутке  $(3; 5]$ .

**Задача 6.** Функция  $f(x)$ , определенная при всех значениях  $x$  и не равная 0 ни при каком значении  $x$ , удовлетворяет равенству  $f(x+4) = \frac{f(x)-1}{f(x)}$ . Найти  $f(2004)$ , если  $f(8) = 5$ .

**Задача 7.** Вычислить  $f(-3)$ , если известно, что  $f(3) = 2$ , а функция  $f(x) + x^2$  нечетная.

**Задача 8.** Для следующих функций  $f(x)$  написать формулу обратной функции  $f^{-1}(x)$  и указать ее область определения:

а)  $f(x) = \frac{x-2}{3x+5}$ ;      б)  $f(x) = \sqrt[3]{2x+7}$ ;      в)  $f(x) = \sqrt{3-2x}+1$ .

**Задача 9.** Пусть  $g(x)$  – функция, обратная к функции  $f(x) = x + 2^{x-1}$ . Вычислить  $g(12)$ .

**Задача 10.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 3^x - \frac{27}{3^x}$ . При каких значениях параметра  $a$  функция  $y = f(x+a)$  является нечетной?

**Задача 11.** При каких значениях параметра  $b$  функция  $f(x) = \cos x + \cos bx$  периодическая?

**Задача 12.** Найти все рациональные значения параметра  $a$ , при которых функции  $f(x) = \sin \frac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}$  и  $g(x) = \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - 2a + \sqrt{108}}$  имеют одинаковый период.

*На дополнительную оценку:*

**Задача 13.** Найти площадь фигуры, координаты  $(x; y)$  точек которой удовлетворяют условиям:

$$(x^2 + y^2 - 4x - 6)(x^2 + y^2 + 2y - 4) \leq 0$$