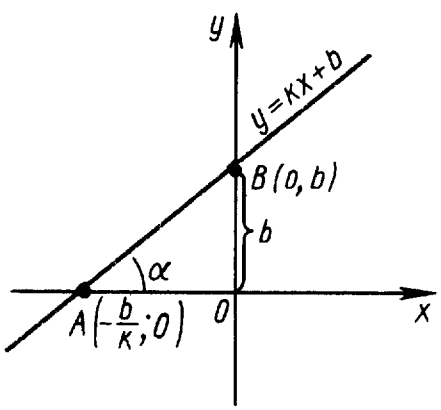
Графики элементарных функций

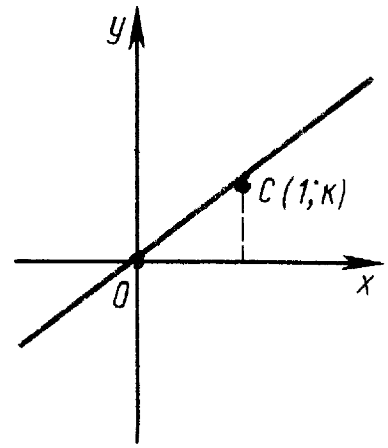
§1. Элементарные функции

1.1. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — числа. Функция определена при любом x.

Графиком линейной функции является прямая. Этот график удобно строить по двум точкам: точке B с координатами $x = 0$, $y = b$ и точке A с координатами $y = 0$, $x = -\frac{b}{k}$ (при $k \neq 0$) (см. левый рисунок). Эти точки являются точками пересечения прямой с осями координат.





В случае $b = 0$ прямая проходит через начало координат и для построения графика следует взять ещё одну точку, например, точку $C(1; k)$ (см. правый рисунок). В случае $k = 0$ прямая параллельна оси абсцисс.

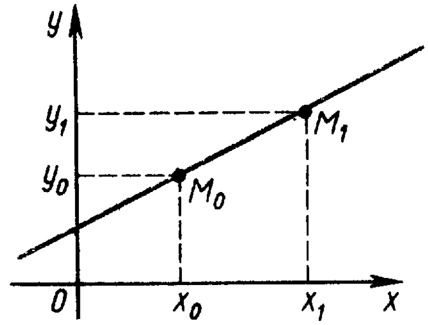
Коэффициенты k и b в уравнении прямой имеют наглядное геометрическое толкование. Значение коэффициента b определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент k является тангенсом угла α, образованного осью абсцисс и прямой; угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки.

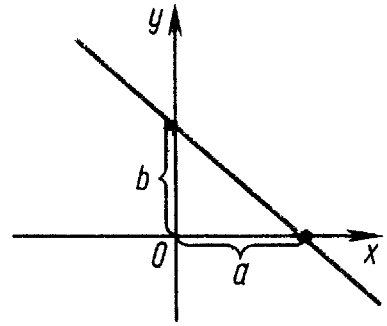
Уравнение прямой может быть представлено в различных видах:

$y = y_0 + k(x - x_0)$ — уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через точку $M(x_0; y_0)$;

$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ — уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_0(x_0; y_0)$ (см. левый рисунок);

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в отрезках (см. правый рисунок).



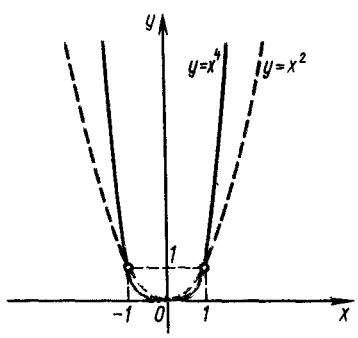


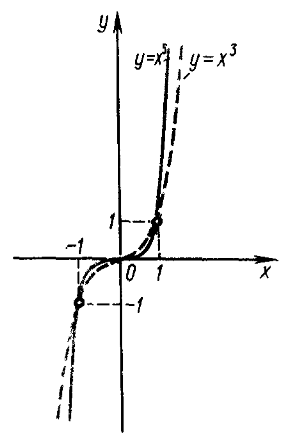
1.2. Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида $y = x^{\alpha}$. Рассмотрим вид графика степенной функции в зависимости от числа α.

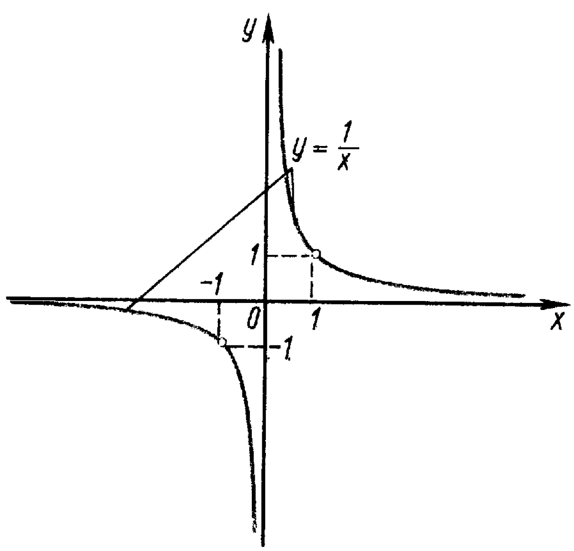
1. $\alpha = n$ ($n \geqslant 2$ — натуральное число).

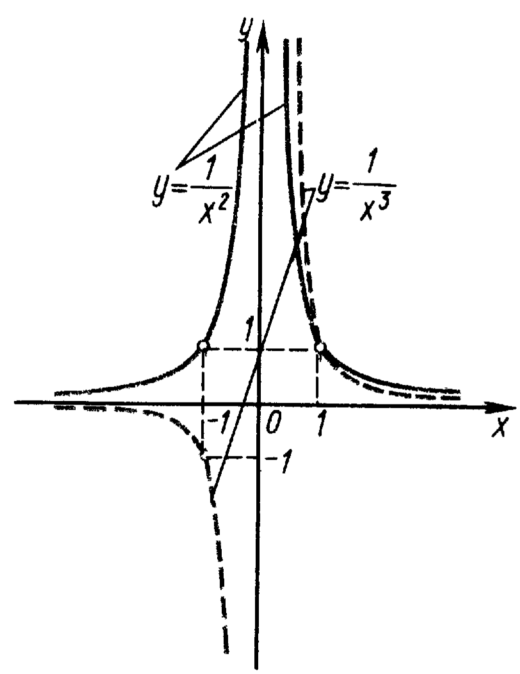
Функция определена при любом x. График функции проходит через точку $(1; 1)$ и касается оси абсцисс в начале координат. График функции при чётных и нечётных n имеет следующий вид.





2. $\alpha = -n$ (n — натуральное число).

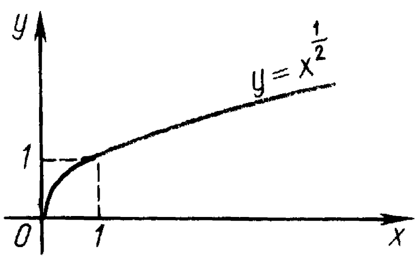


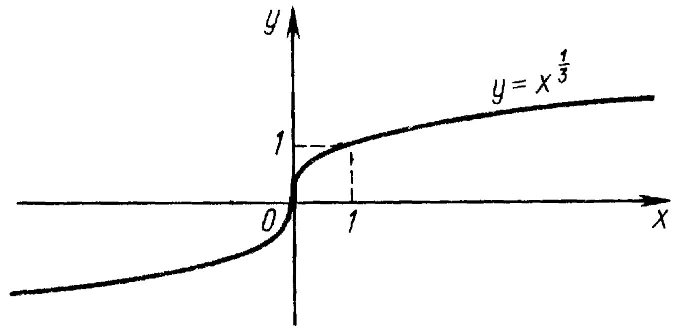


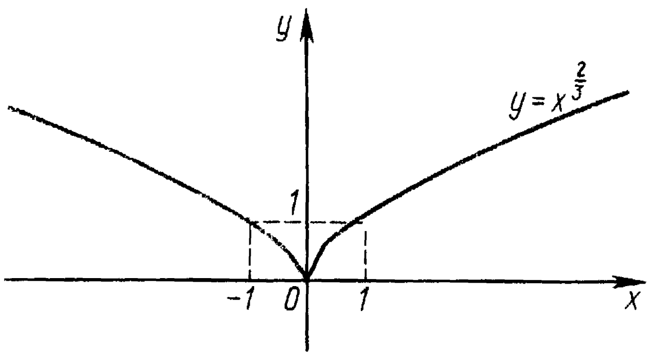
Функция определена при всех x, кроме $x = 0$. График функции проходит через точку $(1; 1)$. Примеры графика функции при $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ изображены на рисунках.

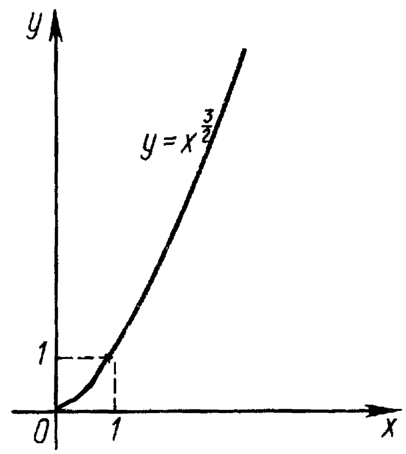
3. $\alpha = r$ $(r = \frac{m}{n}$, m и n — взаимно простые натуральные числа).

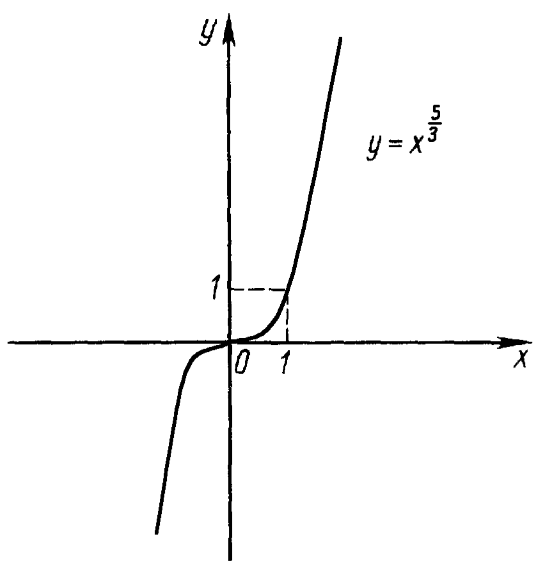
Функция имеет нуль в начале координат, а её график проходит через точку $(1; 1)$. При чётном n функция определена на множестве $[0; +\infty)$, а при нечётном n — на множестве $(-\infty; +\infty)$. Графики функций при различных m и n изображены на следующих рисунках.





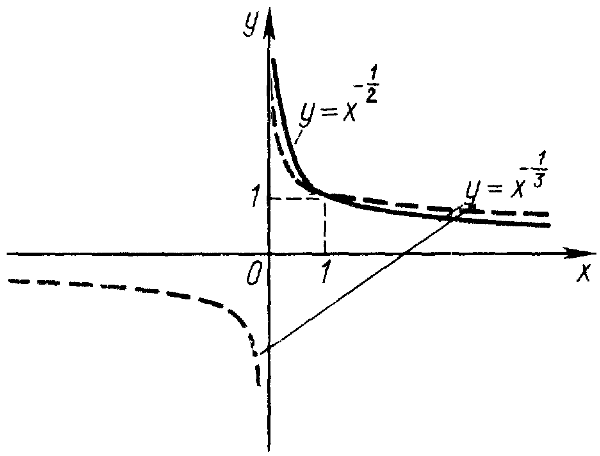


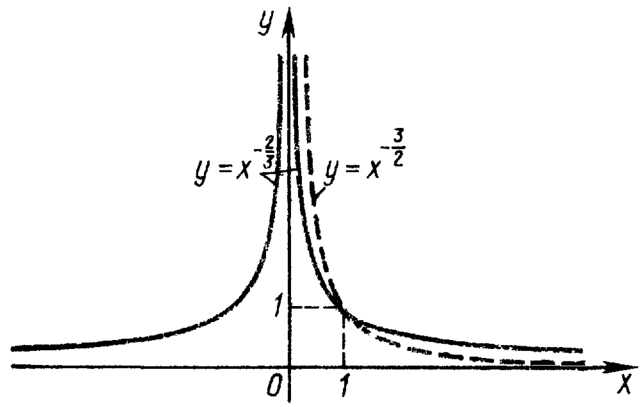




4. $\alpha = q$ ($q = \frac{m}{n} < 0$, m и n — взаимно простые целые числа, $n \neq -1$).

При чётном n функция определена на множестве $(0; +\infty)$, а при нечётном n — на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. График функции проходит через точку $(1; 1)$. Графики функций при различных m и n изображены на следующих рисунках.

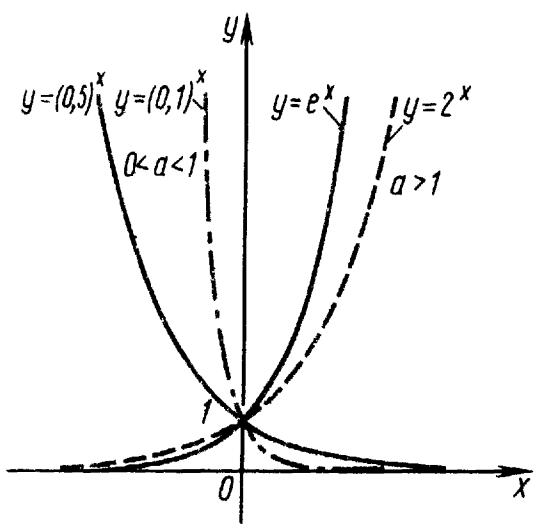




1.3. Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

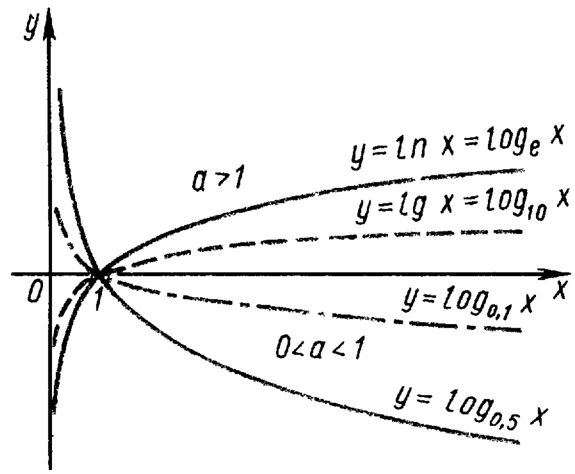
Функция определена при любом x. График функции $y = a^x$ в зависимости от a имеет следующий вид.



1.4. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

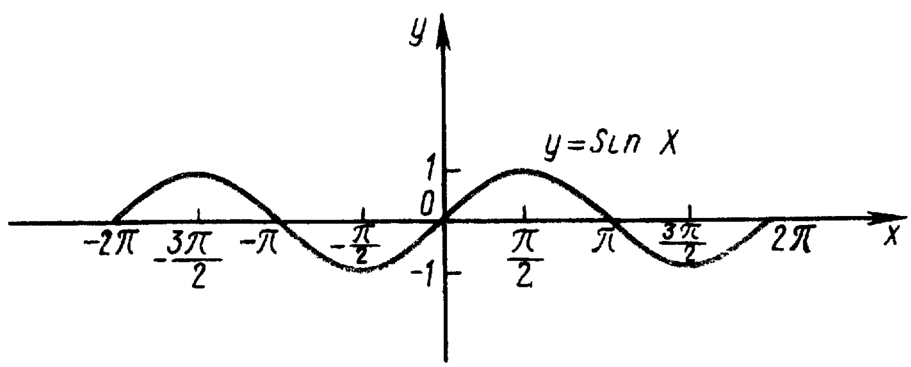
Функция определена при $x > 0$. График функции $y = \log_a x$ в зависимости от a имеет следующий вид.



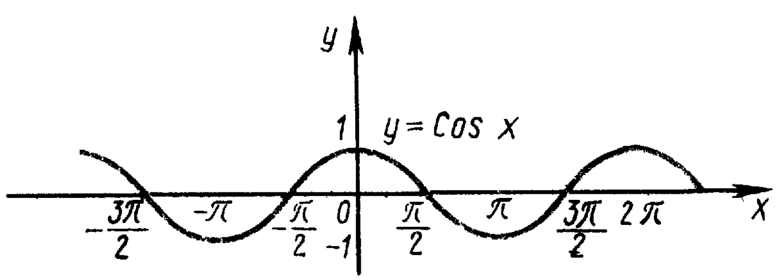
1.5. Тригонометрические функции

Тригонометрическими функциями называются функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

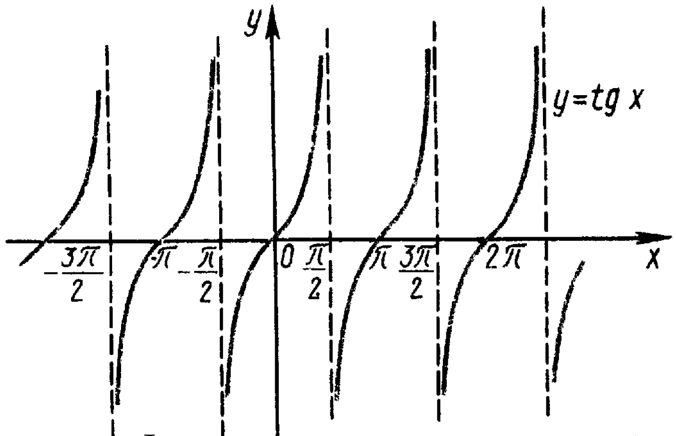
1. Синус $y = \sin x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.



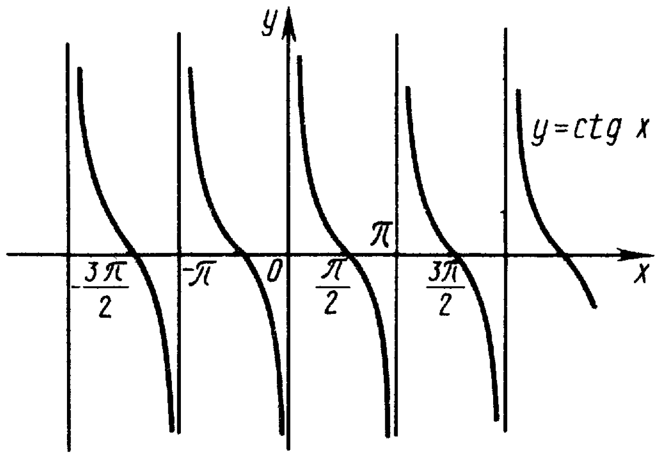
2. Косинус $y = \cos x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.



3. Тангенс $y = \operatorname{tg} x$. Функция определена при любом x, за исключением точек вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. График функции имеет следующий вид.



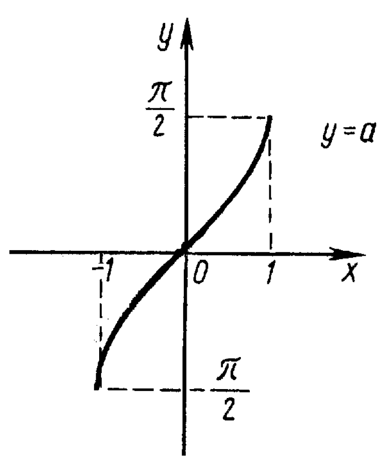
4. Котангенс $y = \operatorname{ctg} x$. Функция определена при любом x, за исключением точек вида πn, $n \in \mathbb{Z}$. График функции имеет следующий вид.



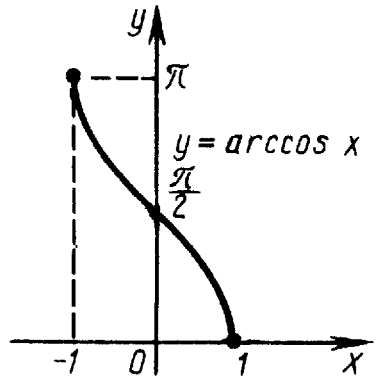
1.6. Обратные тригонометрические функции

Обратными тригонометрическими функциями называются функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

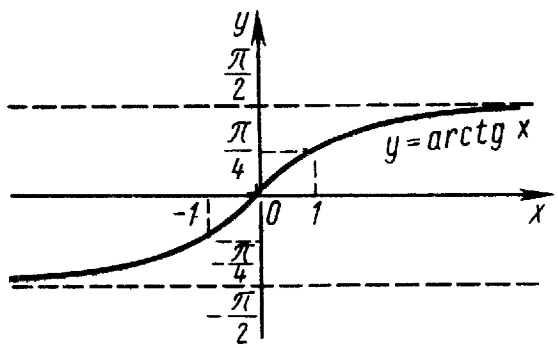
1. Арксинус $y = \arcsin x$. Функция определена при $x \in [-1; 1]$. График функции имеет следующий вид.



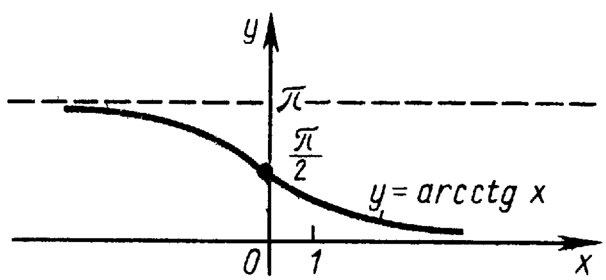
2. Арккосинус $y = \arccos x$. Функция определена при $x \in [-1; 1]$. График функции имеет следующий вид.



3. Арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.



4. Арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$. Функция определена при любом x. График функции имеет следующий вид.

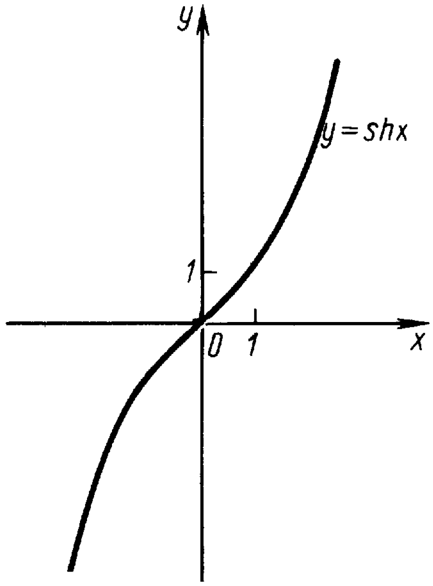


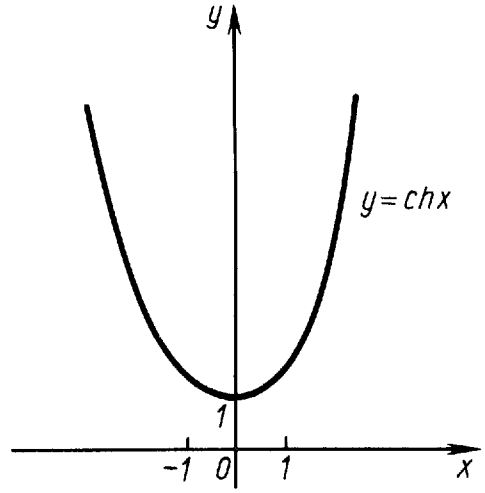
1.7. Гиперболические функции

Гиперболическими функциями называются функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

1. Гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Функция определена при любом x. График функции изображён на левом рисунке.

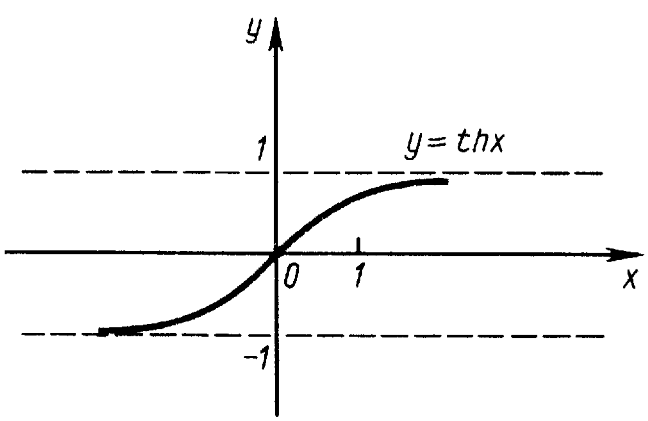
2. Гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Функция определена при любом x. График функции изображён на правом рисунке.

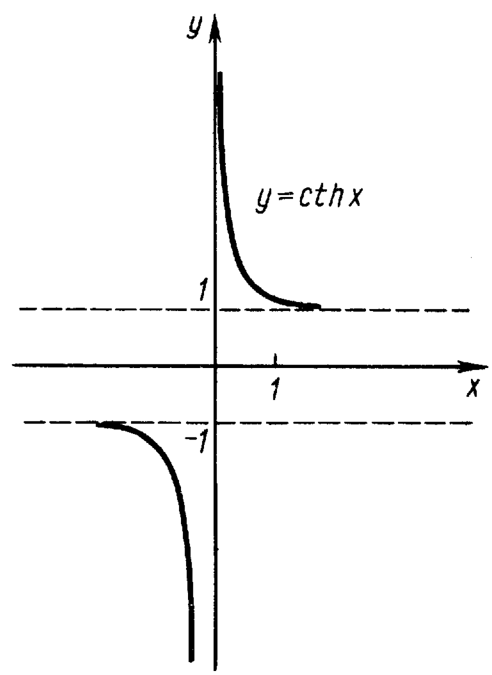




3. Гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Функция определена при любом x. График функции изображён на левом рисунке.

4. Гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Функция определена при любом x, кроме $x = 0$. График функции изображён на правом рисунке.





Приведём некоторые формулы с гиперболическими функциями:

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

из которых при $y = x$, в частности, следует

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

§2. Элементарные преобразования графиков функций

Пусть построен график функции $y = f(x)$. Рассмотрим, как изменяется график функции при определённом преобразовании функции $f(x)$ или её аргумента x.

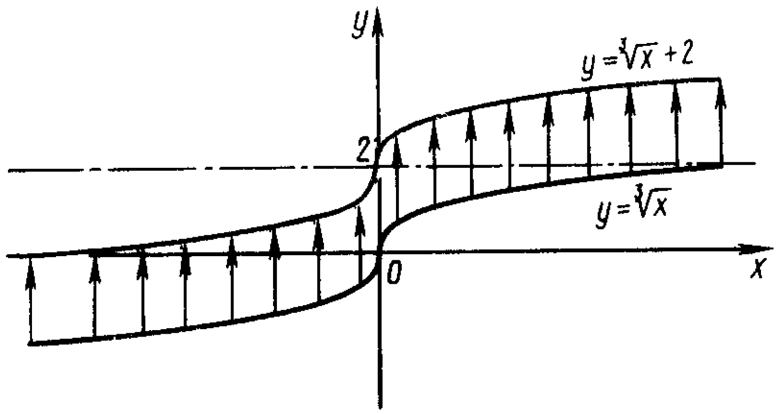
2.1. Сдвиг вдоль оси ординат

Преобразование: $f(x) \to f(x) + b$.

Для построения графика функции $y = f(x) + b$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ по оси Oy на b единиц вверх при $b > 0$, и на $|b|$ единиц вниз при $b < 0$.

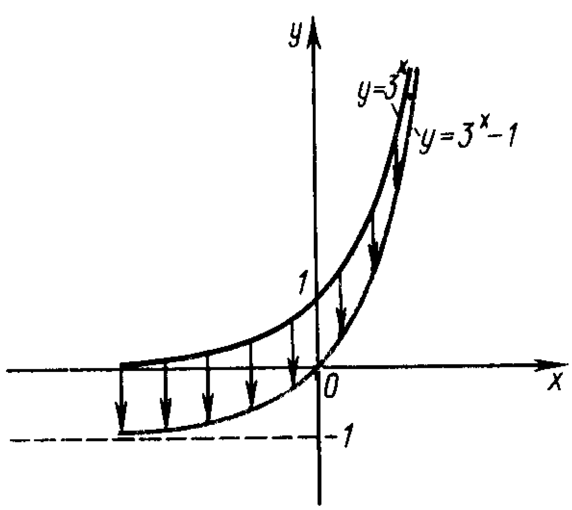
Пример 1. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x} + 2$.

Решение. Строим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и сдвигаем его на 2 единицы вверх.



Пример 2. Построить график функции $y = 3^x - 1$.

Решение. Строим график функции $y = 3^x - 1$ и сдвигаем его на 1 единицу вниз.



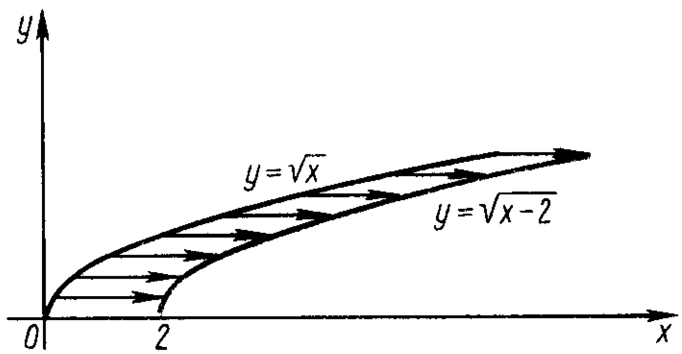
2.2. Сдвиг вдоль оси абсцисс

Преобразование: $f(x) \to f(x+a)$.

Для построения графика функции $y = f(x+a)$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ по оси Ox на a единиц влево при $a > 0$, и на $|a|$ единиц вправо при $a < 0$.

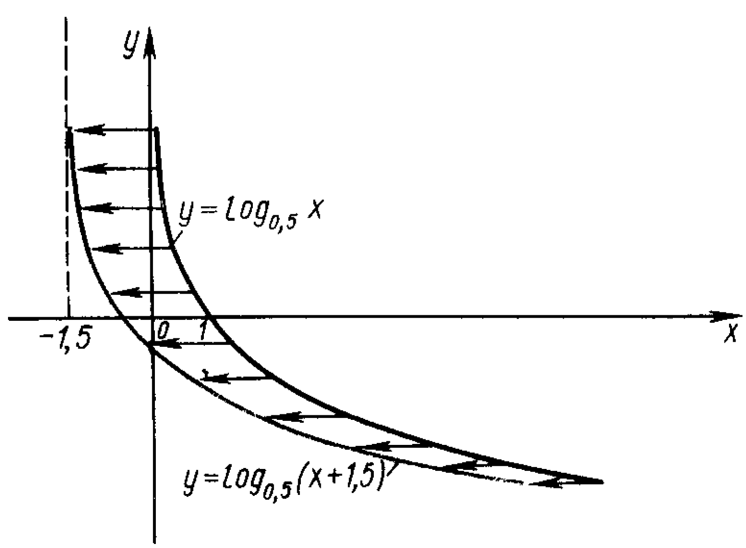
Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt{x-2}$.

Решение. Строим график функции $y = \sqrt{x-2}$ и сдвигаем его на 2 единицы вправо.



Пример 4. Построить график функции $y = \log_{0,5}(x+1,5)$.

Решение. Строим график функции $y = \log_{0,5} x$ и сдвигаем его на 1,5 единицы влево.

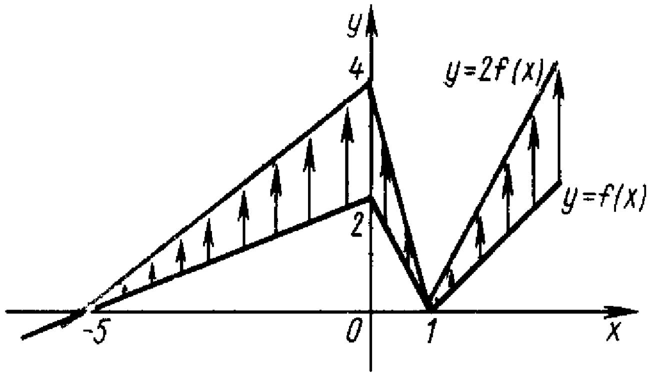


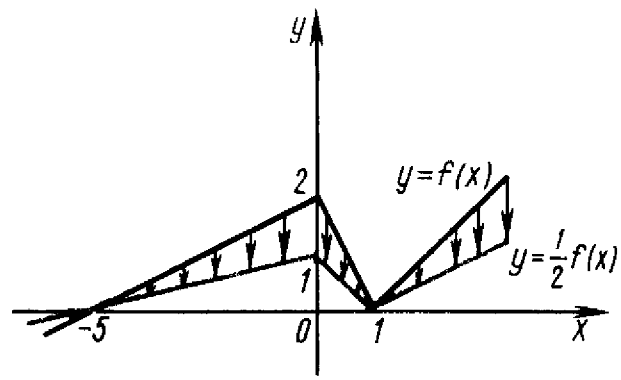
2.3. Растяжение и сжатие вдоль оси ординат

Преобразование: $f(x) \to kf(x)$ $(k > 0,\ k \neq 1)$.

При $k > 1$ график функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. левый рисунок).

При $0 < k < 1$ график функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. правый рисунок).



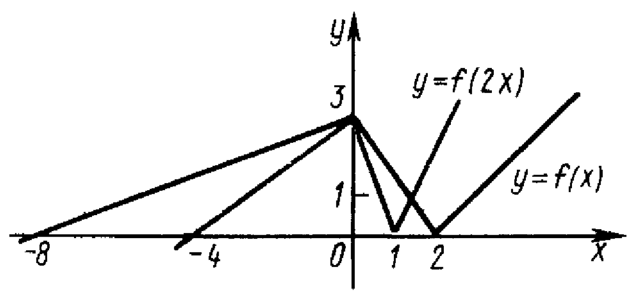


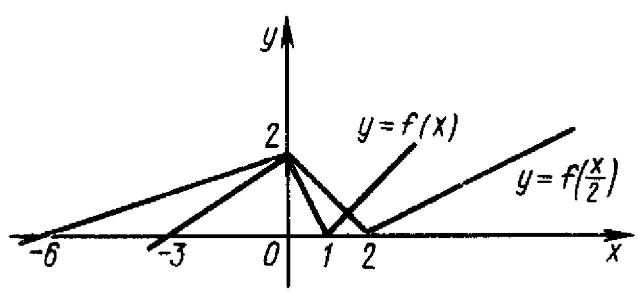
2.4. Растяжение и сжатие вдоль оси абсцисс

Преобразование: $f(x) \to f(kx)$ $(k > 0,\ k \neq 1)$.

При $k > 1$ график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз вдоль оси Ox к оси Oy (см. левый рисунок).

При $0 < k < 1$ график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox к оси Oy (см. правый рисунок).





2.5. Симметричное отражение относительно оси ординат

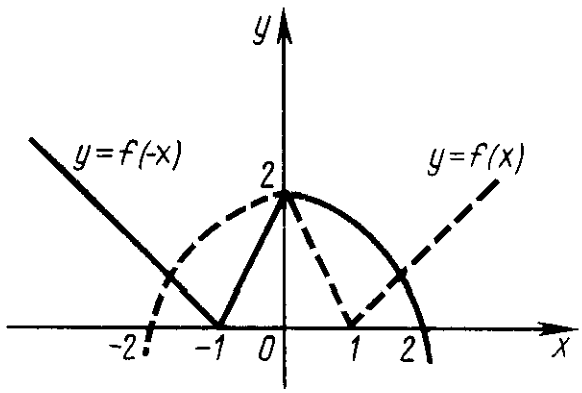
Преобразование: $f(x) \to f(-x)$.

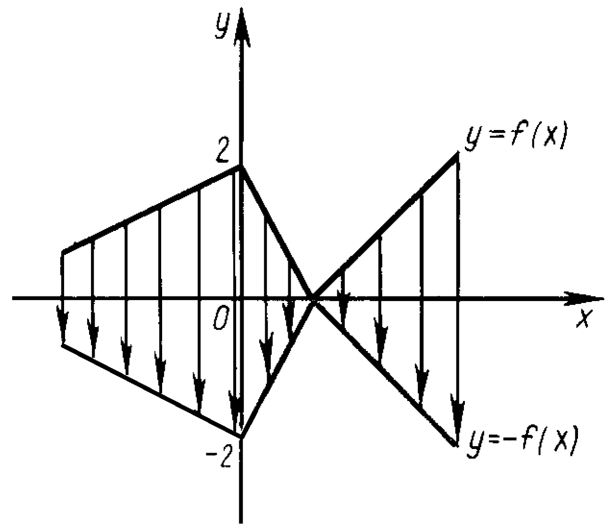
График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отражением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (см. левый рисунок).

2.6. Симметричное отражение относительно оси абсцисс

Преобразование: $f(x) \to -f(x)$.

График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отражением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox (см. правый рисунок).

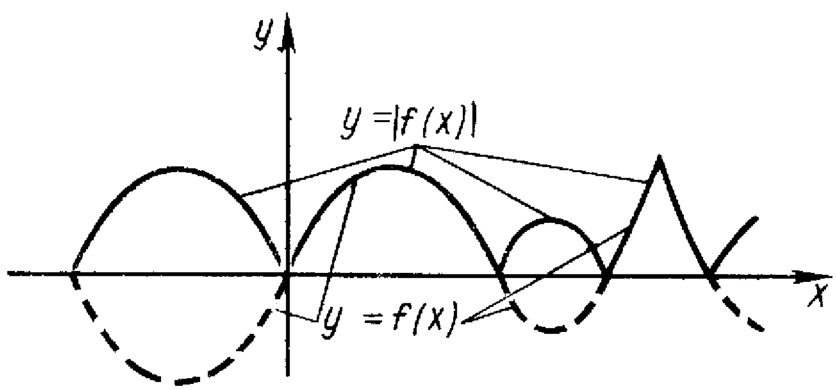




2.7. Модуль функции

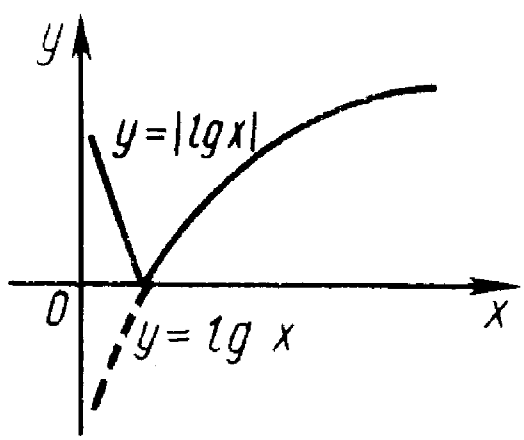
Преобразование: $f(x) \to |f(x)|$.

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо отразить относительно оси Ox часть графика функции $y = f(x)$, расположенную ниже оси Ox, остальная часть графика остаётся без изменений.



Пример 5. Построить график функции $y = |\lg x|$.

Решение. Строим график функции $y = \lg x$, а затем часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, симметрично отражаем наверх.

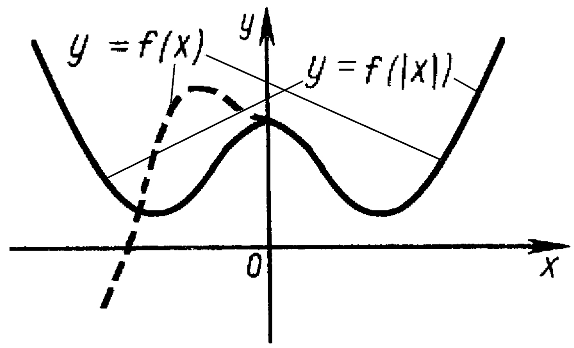


2.8. Модуль аргумента

Преобразование: $f(x) \to f(|x|)$.

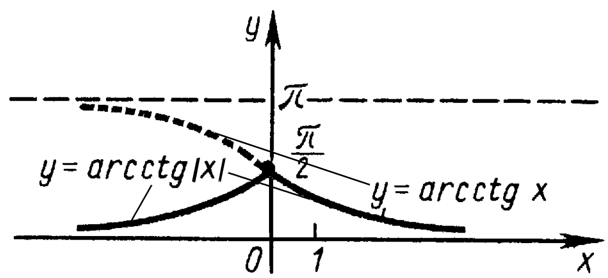
График функции $y = f(|x|)$ строится по графику функции $y = f(x)$ следующим образом:

1) всё, что левее оси Oy, исчезает;
2) всё, что правее оси Oy (включая точку на оси), остаётся;
3) правая часть симметрично относительно оси Oy отражается налево.



Пример 6. Построить график функции $y = \operatorname{arcctg}|x|$.

Решение. Строим график функции $y = \operatorname{arcctg} x$. Согласно приведённому алгоритму: левая часть графика функции $y = \operatorname{arcctg} x$ исчезает, а правая часть остаётся и симметрично отражается налево. Получается график функции $y = \operatorname{arcctg}|x|$.



2.9. Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований

Построение графика функции $y = cf(ax + b) + d$ сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, отражение,...) графика функции $y = f(x)$.

Элементарные преобразования рассмотрены в предыдущих пунктах и сведены в единую таблицу (см. таблицу **220.**).

Представим функцию y в виде $y = cf\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right] + d$.

Из такого представления следует, что для построение графика этой функции достаточно построить график функции $y_1 = cf\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right]$. Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2 =$

$= f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$. В свою очередь для построения графика функции y_2 достаточно построить график функции $y_3 = f(ax)$. Итак, для построения графика функции $y = cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right] + d$ надо с графиком функции $f(x)$ произвести следующие преобразования.

1. Сжать или растянуть график функции $f(x)$ вдоль оси Ox, если $a > 0$; симметрично отразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox, если $a < 0$.

2. Сдвинуть по оси Ox полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\frac{b}{a}\right|$ единиц влево при $\frac{b}{a} > 0$ и вправо при $\frac{b}{a} < 0$.

3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ вдоль оси Oy, если $c > 0$; симметрично отразить относительно оси Ox и сжать или растянуть вдоль оси Oy, если $c < 0$.

4. Сдвинуть полученный график функции $cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ на d единиц вверх при $d > 0$ и на $|d|$ единиц вниз при $d < 0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y = cf(ax+b)+d$ можно представить символически в виде цепочки:

$$f(x) \to f(ax) \to f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right] \equiv f(ax+b) \to cf(ax+b) \to cf(ax+b)+d.$$

На практике удобнее построения графика функции $y = cf(ax+b)+d$ начинать с написания цепочки:

$$cf(ax+b)+d \leftarrow cf(ax+b) \leftarrow f(ax+b) \equiv f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right] \leftarrow f(ax) \leftarrow f(x).$$

Отсюда видно, график какой функции в этой цепочке является базовым для построения графика последующей функции.

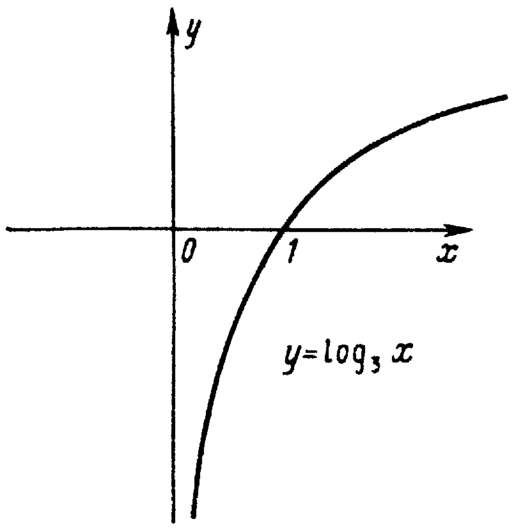
Пример 7. Построить эскиз графика функции $y = \log_3(1-2x)$.

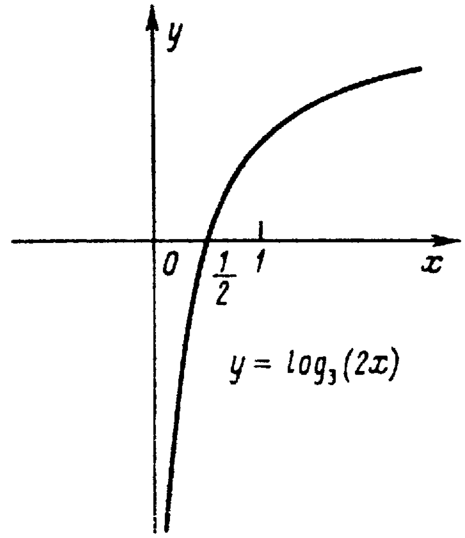
Решение. Напишем цепочку преобразований:

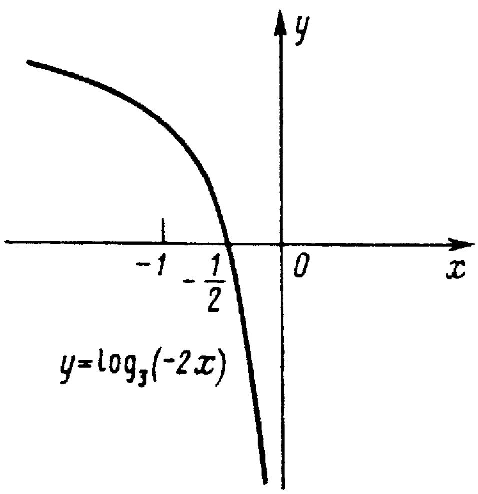
$$\log_3(1-2x) \equiv \log_3\left[-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \leftarrow \log_3(-2x) \leftarrow \log_3(2x) \leftarrow \log_3 x.$$

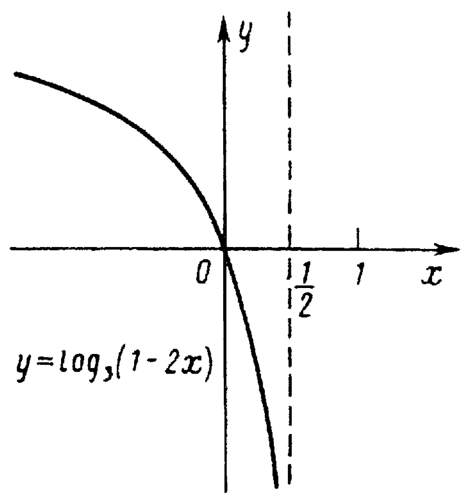
Итак, построение эскиза графика функции $y = \log_3(1-2x)$ начинается с построения графика $y_1 = \log_3 x$, затем сжатия этого графика вдоль оси Ox в два раза, затем симметричного отражения относительно оси Oy и, наконец, сдвига полученного графика на $\frac{1}{2}$ единицы вправо вдоль оси Ox (см. рисунки).

Замечание. Для избежания ошибок при построении графиков, подчеркнём, что величина сдвига вдоль оси Ox определяется тем числом, которое прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax. Поэтому









для нахождения этой константы выражение $ax+b$ сначала преобразуется к виду $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$.

Пример 8. Построить эскиз графика функции $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\arcsin\frac{x-2}{3}\equiv\arcsin\left[\frac{1}{3}\cdot(x-2)\right]\leftarrow\arcsin\left(\frac{1}{3}\cdot x\right)\leftarrow\arcsin x.$$

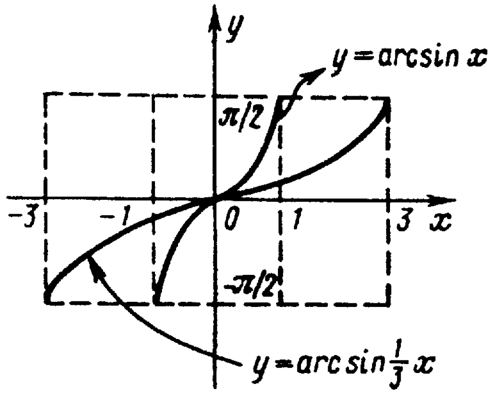
Эскизы графиков приведены на рисунках.

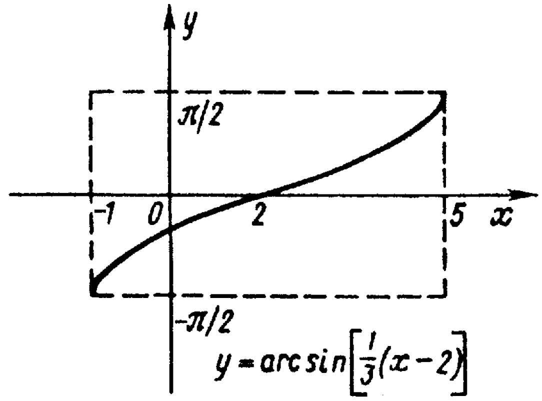
Пример 9. Построить эскиз графика функции $y=\arccos\left|\frac{1-2|x|}{3}\right|$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

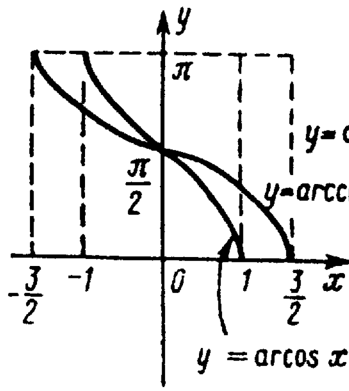
$$\arccos\left|\frac{1-2|x|}{3}\right|\xleftarrow{x>0}\arccos\left|\frac{1-2|x|}{3}\right|\equiv$$

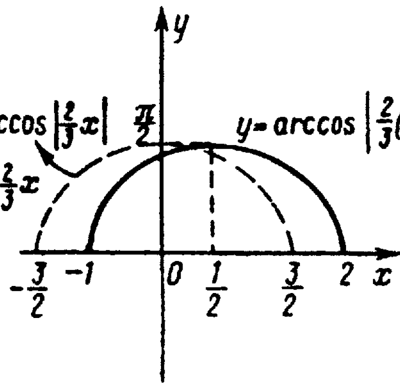
$$\equiv\arccos\left|\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\leftarrow\arccos\left|\frac{2}{3}\cdot x\right|\xleftarrow{x>0}\arccos\left(\frac{2}{3}\cdot x\right)\leftarrow\arccos x.$$

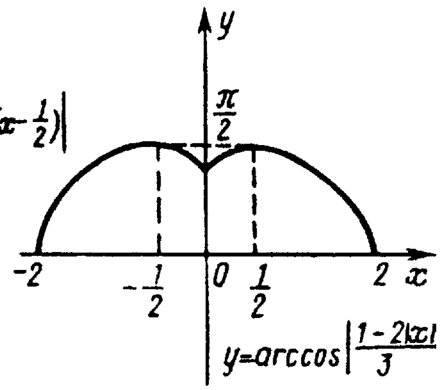




Эскизы графиков изображены на рисунках.





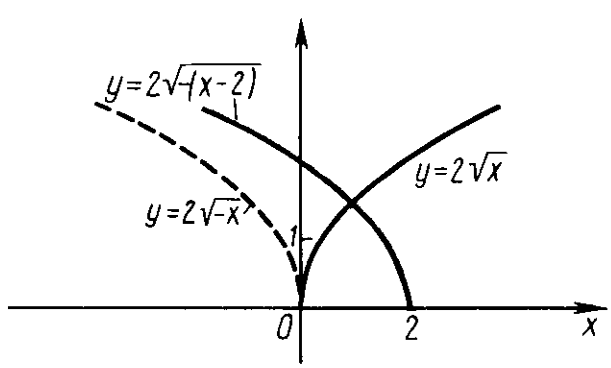


Пример 10. Построить эскиз графика функции $y = \sqrt{8 - 4x}$.

Решение. Запишем заданную функцию в виде

$$y = \sqrt{8 - 4x} = 2\sqrt{-(x - 2)}.$$

Чтобы построить график этой функции, нужно сначала график функции $y = 2\sqrt{x}$ симметрично отразить относительно оси Oy, а затем сдвинуть полученный график на 2 единицы вправо (см. рисунок).

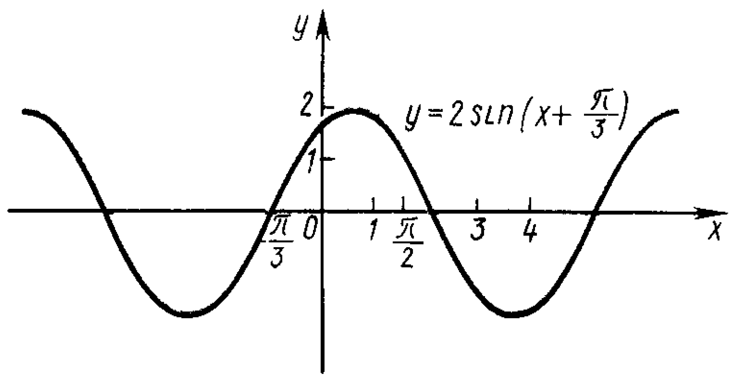


Пример 11. Построить эскиз графика функции $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) =$$
$$= 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

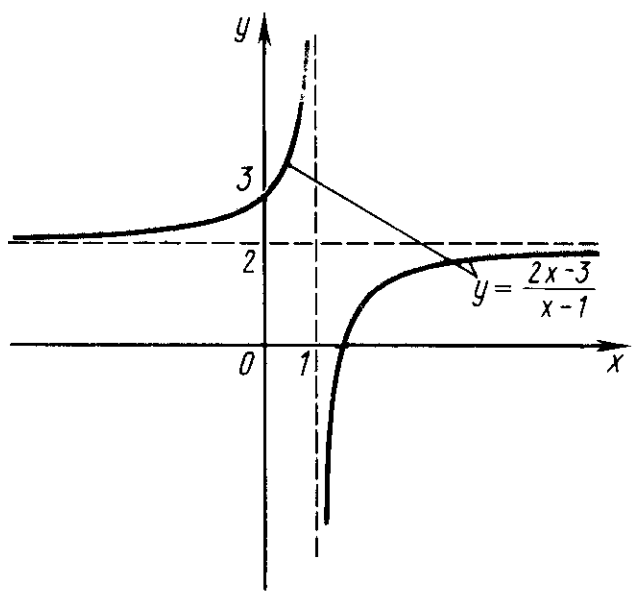
Таким образом, нужно построить график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Это — график функции $y = 2\sin x$, смещённый на $\frac{\pi}{3}$ влево (см. рисунок).



Пример 12. Построить эскиз графика функции $y = \frac{2x-3}{x-1}$.
Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

Таким образом, нужно построить график функции $y = -\frac{1}{x-1} + 2$. Это — график гиперболы $y = -\frac{1}{x}$, смещённый на единицу вправо и на две единицы вверх (см. рисунок).

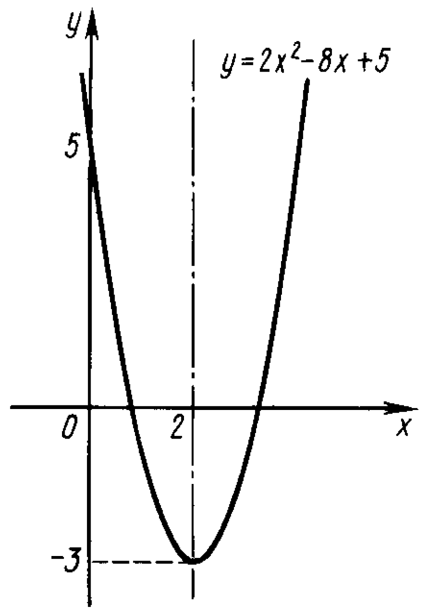


Пример 13. Построить эскиз графика функции $y = 2x^2 - 8x + 5$.

Решение. Преобразуем квадратный трёхчлен:

$$2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 4x + 4 - \frac{3}{2}\right) = 2(x-2)^2 - 3.$$

Итак, нужно построить график функции $y = 2(x-2)^2 - 3$. Это — график параболы $y = 2x^2$, смещённый на две единицы вправо и на три единицы вниз (см. рисунок).



Задачи для самостоятельного решения

Построить график функции:

1. $y = 4x + 8$;
2. $y = -\frac{x}{3} + 2$;
3. $y = 3x - 2$;
4. $y = |x|$;
5. $y = \frac{|x|}{x}$;
6. $y = 2|x+1|$;
7. $y = -|5x+2|$;
8. $y = |x| + 3$;
9. $y = |x| + x$;
10. $y = \frac{x}{2} + |x| - 1$;
11. $y = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$;
12. $y = x^2 + 2$;
13. $y = -x^2 + 3$;
14. $y = 2x^2 + 1$;
15. $y = |4 - x^2|$;
16. $y = -4x^2 + 1$;

17. $y = (x-4)^2$;
18. $y = -(x+1)^2$;
19. $y = (x+2)^2 - 1$;
20. $y = (x-2)^2 + 1$;
21. $y = 1 - 3(x-3)^2$;
22. $y = x^2 - 4x + 1$;
23. $y = x^2 - 5x + 6$;
24. $y = x^2 + 2x - 3$;
25. $y = 3x - x^2$;
26. $y = 2x^2 - 4x$;
27. $y = 4 - 2x^2 - 2x$;
28. $y = 4x - x^2 - 3$;
29. $y = 2|x| - x^2$;
30. $y = x|x-1|$;
31. $y = |x^2 - 3x - 4|$;
32. $y = (x-1)(1-|x|)$;
33. $y = |x - x^2 - 1|$;
34. $y = x^n$ при $n = 3, 4, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$;
35. $y = \sqrt{x+1}$;
36. $y = \sqrt{1-4x}$;
37. $y = -\sqrt{2x-1}$;
38. $y = \sqrt[3]{8x-1}$;
39. $y = 1 - \sqrt[3]{2x+1}$;
40. $y = \frac{k}{x}$ при $k = 1, -1, \frac{1}{2}$;
41. $y = \frac{1}{x} + 2$;
42. $y = -\frac{3}{x} - 1$;
43. $y = 3 - \frac{4}{x}$;
44. $y = 1 + \frac{1}{x-2}$;
45. $y = 2 - \frac{3}{x+1}$;
46. $y = \frac{1}{x+3} - 1$;
47. $y = -\frac{1}{x+2} - 3$;
48. $y = \frac{x+5}{x+3}$;
49. $y = \frac{5-2x}{x-2}$;
50. $y = \frac{4x+7}{2x-5}$;
51. $y = \frac{9x+4}{3x+2}$;
52. $y = \frac{3-3x}{2-6x}$;
53. $y = \frac{6x-2}{x-1}$;
54. $y = \left|\frac{7x+5}{5x+6}\right|$;

55. $y = \left|\frac{4-x}{5+2x}\right|$;
56. $y = \left|\frac{x}{3x+5}\right|$;
57. $y = \frac{2+x}{|x-1|}$;
58. $y = \frac{2|x|+3}{2-|x|}$;
59. $y = \frac{|7x+2|}{2x+1}$;
60. $y = \frac{2x+4}{|3x+5|}$;
61. $y = \frac{|2-x|}{4x-1}$;
62. $y = \frac{x+2}{|x+2|}$;
63. $y = \frac{|x-3|}{x-3}$;
64. $y = a^x$ при $a = 2, \frac{1}{2}, 3$;
65. $y = 3^{x-2}$;
66. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$;
67. $y = 5^{\frac{x}{2}-1}$;
68. $y = -2^{2x-1}$;
69. $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;
70. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3x} - 2$;
71. $y = 3^{\frac{x}{2}} - 2$;
72. $y = 2^{1-2x} - 1$;
73. $y = 2 - 3^{\frac{x+1}{2}}$;
74. $y = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$;
75. $y = 2^{1-2x} + 1$;
76. $y = a^{|x|}$ при $a = 2, \frac{1}{2}$;
77. $y = \log_a x$ при $a = 2, \frac{1}{2}, 10$;
78. $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$;
79. $y = \log_2(x-2)$;
80. $y = \log_{\frac{1}{2}}(3-2x)$;
81. $y = -\log_3\left(\frac{x}{2}+1\right)$;
82. $y = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(4-3x)$;
83. $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-5)$;
84. $y = \log_2(-x)$;
85. $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$;
86. $y = \log_{\frac{1}{3}}|3-2x|$;
87. $y = \log_4|x+2|$;
88. $y = |\log_3(4-3x)|$;
89. $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{x}{2}\right)\right|$;

90. $y = |\log_2 |3x + 4||$;
91. $y = \sin ax$ при $a = 1, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$;
92. $y = \cos ax$ при $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}$;
93. $y = \operatorname{ctg} ax$ при $a = 1, 2, \frac{1}{2}, \pi$;
94. $y = \operatorname{tg} ax$ при $a = 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi$;
95. $y = \cos \frac{3}{2}x + 1$;
96. $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
97. $y = 2 \sin 3x + 1$;
98. $y = \frac{1}{2} \cos \pi x - 1$;
99. $y = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}$;
100. $y = -2 \sec \frac{x}{2}$, где $\sec x = \frac{1}{\cos x}$;
101. $y = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x$, где $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$;
102. $y = 1 - 2 \sin \pi x$;
103. $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
104. $y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
105. $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;
106. $y = \left|\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$;
107. $y = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;
108. $y = -2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$;
109. $y = 2 \sin \left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$;
110. $y = \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$;
111. $y = \sin x + \cos x$;
112. $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$;
113. $y = |\sin 3x|$;
114. $y = \sin^2 x$;
115. $y = \cos^2 x$;
116. $y = \arcsin(x + 1)$;
117. $y = \arccos(x - 2)$;
118. $y = \arcsin(3x + 1)$;
119. $y = -\arcsin \frac{x+2}{3}$;
120. $y = \frac{1}{2} \arccos(2x - 3)$;
121. $y = 2 \operatorname{arctg}(2x - 1)$;
122. $y = -\operatorname{arcctg}(4x - 1)$;
123. $y = 3 \operatorname{arcctg}(3x + 1)$;
124. $y = 2 \arccos \frac{1-x}{2}$;
125. $y = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{x+2}{2}$;
126. $y = \frac{1}{3} \arccos 2x - 32$;
127. $y = 2 \arcsin 2x + 33$.

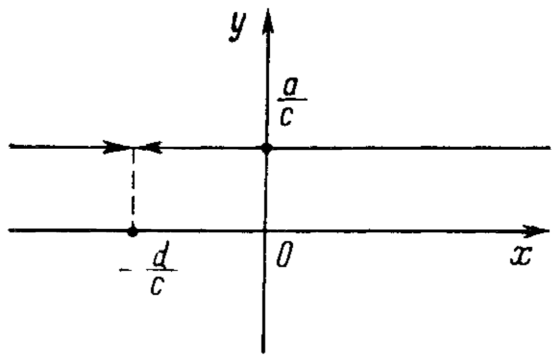
§3. Эскизирование графиков функций

3.1. График дробно-линейной функции

Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0.$$

Если числитель и знаменатель дробно-линейной функции имеют общий множитель $x-\alpha$, то функция всюду, кроме точки $x = -\frac{d}{c}$, есть постоянная $\frac{a}{c}$ и график её имеет вид, изображённый на рисунке. Обратите внимание на



отличие этого графика от графика функции $y = \frac{a}{c}$.

Далее предполагаем, что рассматриваемая дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ несократима, то есть $bc \neq ad$. Преобразуем дробь.

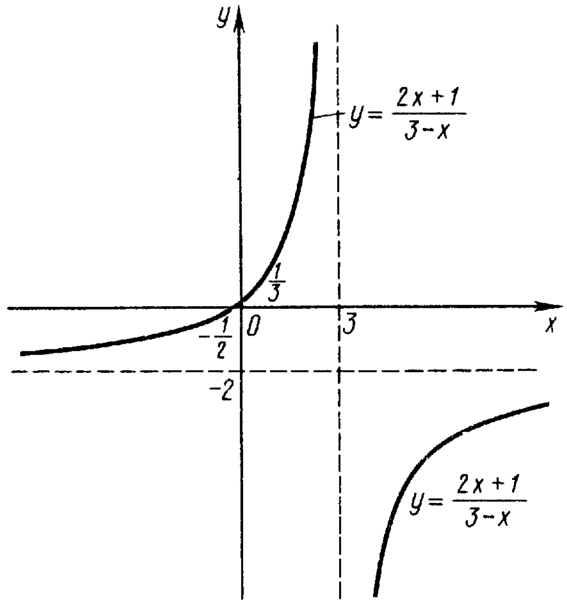
$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}.$$

График дробно-линейной функции $y = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}$ — гипербола $y = \frac{k}{x}$, сдвинутая по оси Ox на $\left|\frac{d}{c}\right|$ вправо или влево в зависимости от знака дроби $\frac{d}{c}$ и по оси Oy на $\left|\frac{a}{c}\right|$ вверх или вниз в зависимости от знака дроби $\frac{a}{c}$.

Таким образом, чтобы построить эскиз графика дробно-линейной функции, достаточно знать её асимптоты и расположение относительно них одной из ветвей гиперболы, так как вторая ветвь симметрична первой относительно точки пересечения асимптот. Асимптотами являются прямые $x = -\frac{d}{c}$ и $y = \frac{a}{c}$, полученные соответствующим сдвигом асимптот кривой $y = \frac{k}{x}$, а положение одной из ветвей определяется, например, точкой пересечения гиперболы с осью Ox или Oy.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{2x+1}{3-x}$.

Решение. Асимптотами данного графика функции являются прямые $x = -\frac{3}{-1} = 3$ и $y = \frac{2}{-1} = -2$. Точка пересечения гиперболы с осью Oy есть точка $(0; y(0)) = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Строим эскиз графика функции.



3.2. График алгебраической функции специального вида

Рассмотрим алгоритм построения графика функции вида

$$y = (x - b_1)^{a_1}(x - b_2)^{a_2} \dots (x - b_k)^{a_k}.$$

При построении эскиза графика данной функции в окрестности точки b_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ эту функцию представляют в виде

$$y = (x - b_i)^{a_i} h(x), \text{ где } h(b_i) \neq 0.$$

Тогда исходная функция имеет в точке $(b_i; 0)$ вертикальную или горизонтальную касательную одновременно с графиком функции $y = (x - b_i)^{a_i}$.

Пример 2. Построить эскиз графика функции $y = x^2(x - 2)(x + 1)$.

Решение. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет. Функция обращается в нуль при $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$.

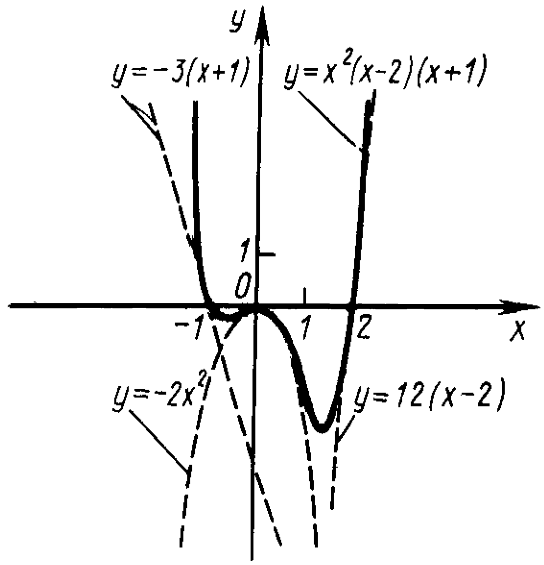
Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x \to 0, \text{ то } x^2(x - 2)(x + 1) \sim -2x^2;$$
$$\text{если } x \to -1, \text{ то } x^2(x - 2)(x + 1) \sim -3(x + 1);$$
$$\text{если } x \to 2, \text{ то } x^2(x - 2)(x + 1) \sim 12(x - 2).$$

Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\text{если } x \to +\infty, \text{ то } x^2(x - 2)(x + 1) \sim x^4;$$
$$\text{если } x \to -\infty, \text{ то } x^2(x - 2)(x + 1) \sim x^4.$$

Наносим полученные результаты на рисунок и отдельные части графика (в силу непрерывности) соединяем сплошной линией.



Замечание. Идея эскизирования графиков состоит в том, чтобы соединять сплошной линией не отдельные точки графика, а отдельные его части (куски).

Пример 3. Построить эскиз графика функции $y = x^3\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

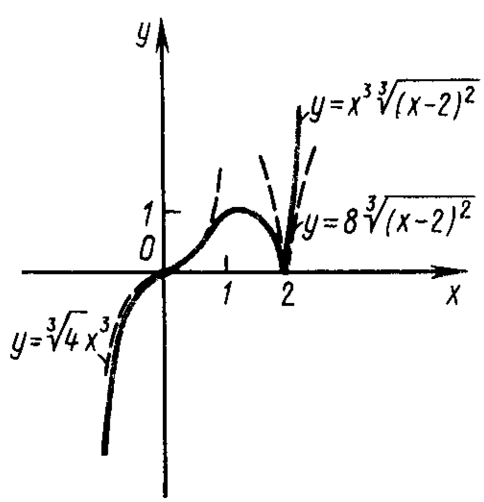
Решение. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет. Функция обращается в нуль при $x = 0$, $x = 2$.

Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x \to 0, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim \sqrt[3]{4}\,x^3;$$
$$\text{если } x \to 2, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim 8\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\text{если } x \to +\infty, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{\frac{11}{3}};$$
$$\text{если } x \to -\infty, \text{ то } x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{\frac{11}{3}}.$$



Пример 4. Построить эскиз графика функции $y = \sqrt{x(1-x)(1+x)}$.

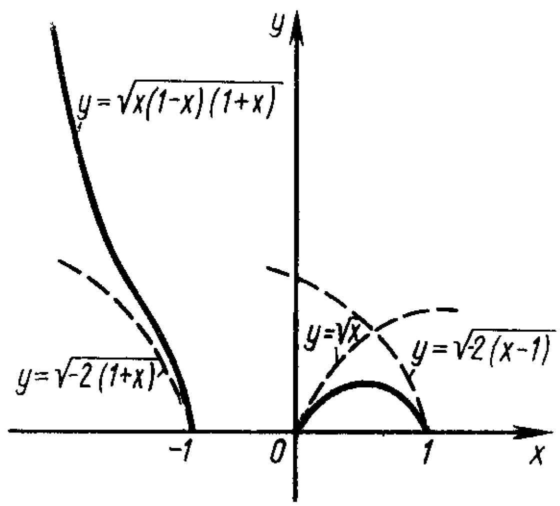
Решение. Область определения функции находим, решая неравенство $x(1-x)(1+x) \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Нули функции — точки $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x \to 0+, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{x};$$
$$\text{если } x \to -1-, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(x+1)};$$
$$\text{если } x \to 1-, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(x-1)}.$$

Исследуем поведение функции на минус бесконечности:

$$\text{если } x \to -\infty, \text{ то } \sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-x^3}.$$

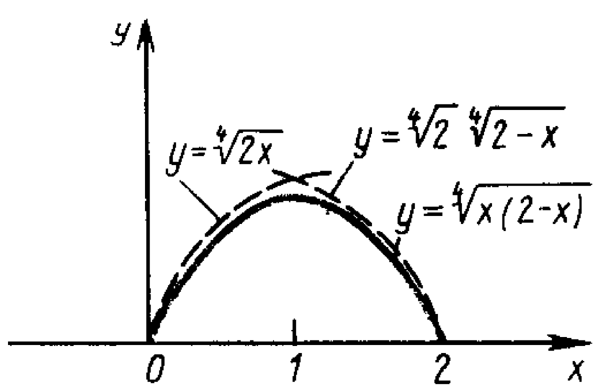


Пример 5. Построить эскиз графика функции $y = \sqrt[4]{x(2-x)}$.

Решение. Область определения функции находим, решая неравенство $x(2-x) \geqslant 0$, откуда $0 \leqslant x \leqslant 2$. Нули функции — точки $x = 0$, $x = 2$.

Исследуем поведение функции в нулях:

$$\text{если } x \to 0+, \text{ то } \sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{x};$$
$$\text{если } x \to 2-, \text{ то } \sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2-x}.$$



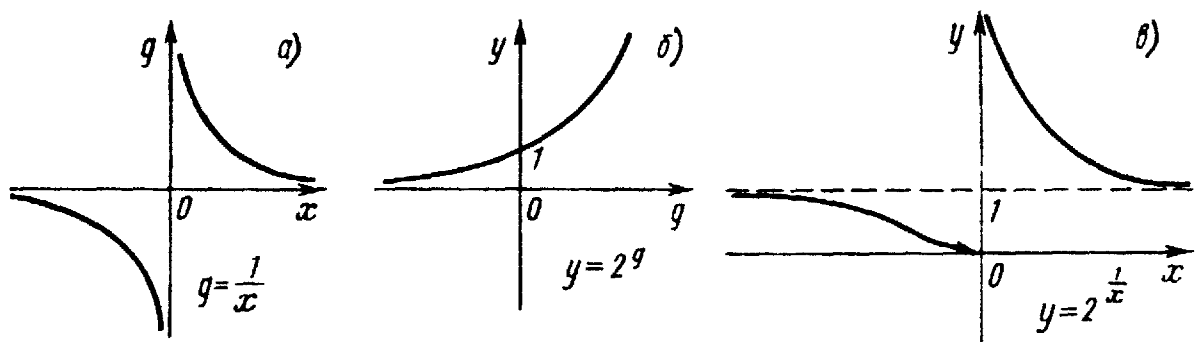
3.3. График сложной функции

Для построения эскиза графика сложной функции $y = f(g(x))$ строят графики функций $y = f(x)$ и $g = g(x)$. Затем необходимо отдельно рассмотреть участки монотонности $(a_k; a_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, функции $g = g(x)$. На каждом из участков монотонности $(a_k; a_{k+1})$ функции $g = g(x)$ рассматривается функция $y = f(g)$. В случае необходимости участок монотонности $(a_k; a_{k+1})$ делится на более мелкие $(b_l; b_{l+1})$ так, чтобы функция $y = f(g)$ была определена и монотонна на участке $(g(b_l); g(b_{l+1}))$. Результаты исследований заносят в таблицу.

x	$(a; b)$	Участки монотонности функции $g = g(x)$ с учётом монотонности и области определения функции $y = f(g)$
$g = g(x)$	$g(a) \nearrow g(b)$ $g(a) \searrow g(b)$	Указывается изменение функции $g = g(x)$ на участке $(a; b)$ (убывание или возрастание)
$y = f(g)$	$f(g(a)) \nearrow f(g(b))$ $f(g(a)) \searrow f(g(b))$	Указывается изменение функции $y = f(g)$ на участке $(g(a); g(b)$

Пример 6. Построить эскиз графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Графики функций $g = \frac{1}{x}$ и $y = 2^x$ см. на рис. а), б). Функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ определена на объединении множеств $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, то есть на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На множестве $(-\infty; 0)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to -\infty$ и монотонно стремится к $-\infty$ при $x \to 0$; на множестве $(0; +\infty)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $x \to 0$ и монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что функция $y = 2^g$ определена на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На множестве $(-\infty; 0)$, когда x стремится к $-\infty$, функция $y = 2^g$ стремится к единице, оставаясь меньше 1, а когда $x \to 0$, то стремится к 0. На множестве $(0; +\infty)$, когда $x \to 0$, функция $y = 2^g$ стремится к $+\infty$, а когда $x \to +\infty$, то стремится к единице, оставаясь больше 1. Теперь рисуем эскиз графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ (см. рис. в)).



Замечание. Результаты исследования полезно свести в таблицу и потом строить график.

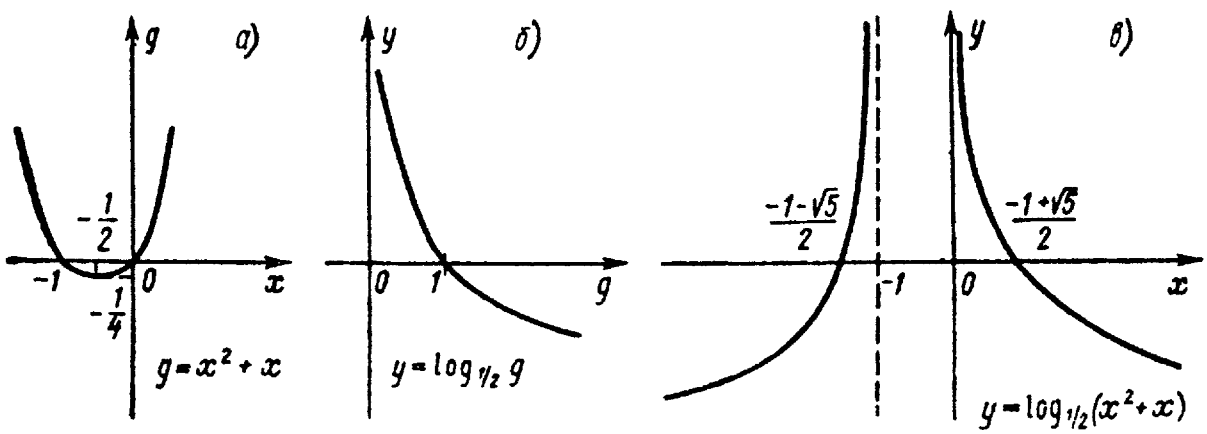
x	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	Участки монотонности функции $\frac{1}{x}$
$g = \frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	Изменение $g(x)$ на этих участках
$y = 2^{\frac{1}{x}}$	$1 \searrow 0$	$+\infty \searrow 1$	Изменение $y = y(g(x))$ на этих участках

Пример 7. Построить эскиз графика функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x)$.

Решение. Построим график функции $g = x^2 + x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} g$ (см. рис. а) и б)). Так как при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ функция $g = x^2 + x$ не положительна (рис. а)), то функция $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x)$ определена при $x \in (-\infty; -1) \cup 0; +\infty)$. Составим таблицу.

x	$-\infty \nearrow -1$	$0 \nearrow +\infty$
$g = x^2 + x$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$
$y = \log_{\frac{1}{2}} g$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$

Строим эскиз графика функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x)$ (см. рис. в)).



3.4. Кривые, заданные параметрически

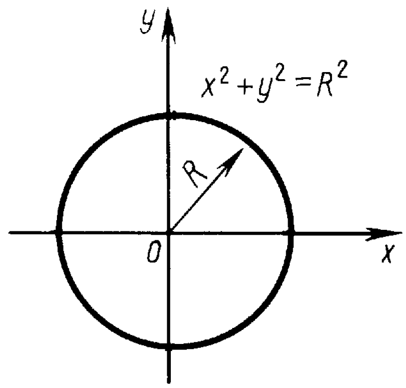
Кривой, заданной параметрически, называется множество точек плоскости xOy, координаты которых определяются из соотношений

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

при каждом фиксированном значении t из некоторого множества T.

Рассмотрим уравнения некоторых кривых в параметрической форме.

Окружность $x^2 + y^2 = R^2$. Обозначим через t угол, образованный радиусом, проведённым в некоторую точку $M(x, y)$ окружности и осью Ox. Тогда координаты любой точки окружности выразятся через параметр t

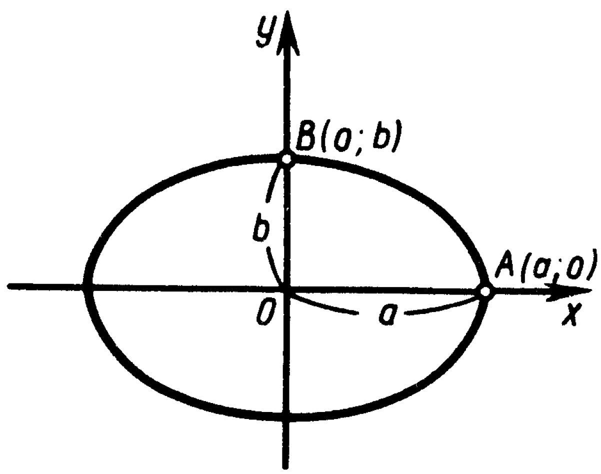


следующим образом:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Это параметрическое уравнение окружности.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Координаты любой точки эллипса выразятся через



параметр t следующим образом:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

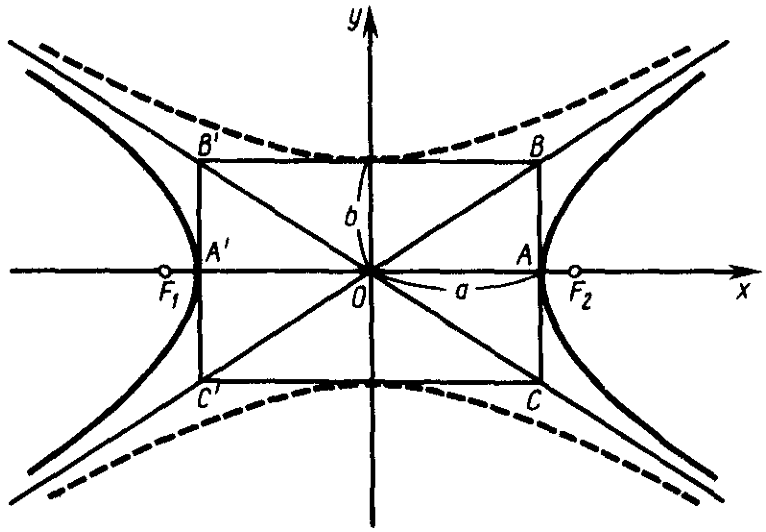
Это параметрическое уравнение эллипса.

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$x = a\operatorname{ch} t, \quad y = b\operatorname{sh} t, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Это параметрическое уравнение гиперболы.

Для построения эскиза кривой, заданной параметрически на плоскости xOy, необходимо отдельно рассматривать участки монотонности $x(t)$, а затем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые проводятся при рассмотрении сложной функции.

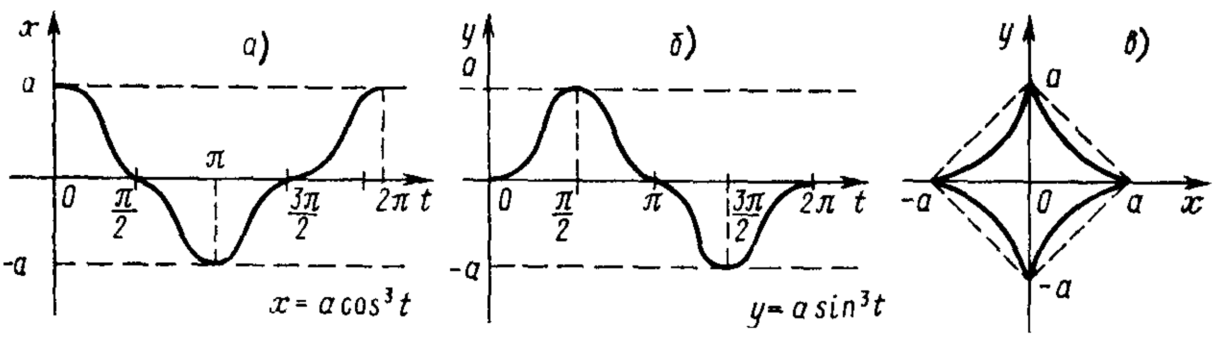


Пусть t возрастает. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ возрастают, то движение по кривой происходит направо вверх; если $x(t)$ убывает, а $y(t)$ возрастает, то движение по кривой происходит влево вверх и так далее. Если при $t \to t_0$ имеем $x \to a$, а $y(t)$ стремится к бесконечности, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x = a$. Если при $t \to t_0$ имеем, что $x(t)$ стремится к бесконечности, а $y(t) \to b$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = b$.

Таким образом, для построения эскиза кривой, заданной параметрически, важно точное определение участков монотонности функций $x(t)$ и $y(t)$.

Пример 8. Построить эскиз кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0 + 2\pi); y(t_0 + 2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0); y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке $[0; 2\pi)$. Построим эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рисунки а) и б)).



Промежутками монотонности $x(t)$ являются интервалы $(0; \pi)$ и $(\pi; 2\pi)$. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0); y(0)) = (a; 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right); y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0; a)$. Когда t растёт от $\frac{\pi}{2}$ до π, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi); y(\pi)) = (-a; 0)$. Когда t растёт от π до $\frac{3\pi}{2}$, движение по кривой происходит вправо вниз до точки $\left(x\left(\frac{3\pi}{2}\right); y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0; -a)$. Когда t растёт от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, движение по кривой происходит вправо вверх до точки $(x(2\pi); y(2\pi)) = (a; 0)$. Так как

$$x(2\pi - t_0) = x(t_0),\ y(2\pi - t_0) = -y(t_0),\ x(\pi - t_0) = -x(t_0),\ y(\pi - t_0) = y(t_0),$$

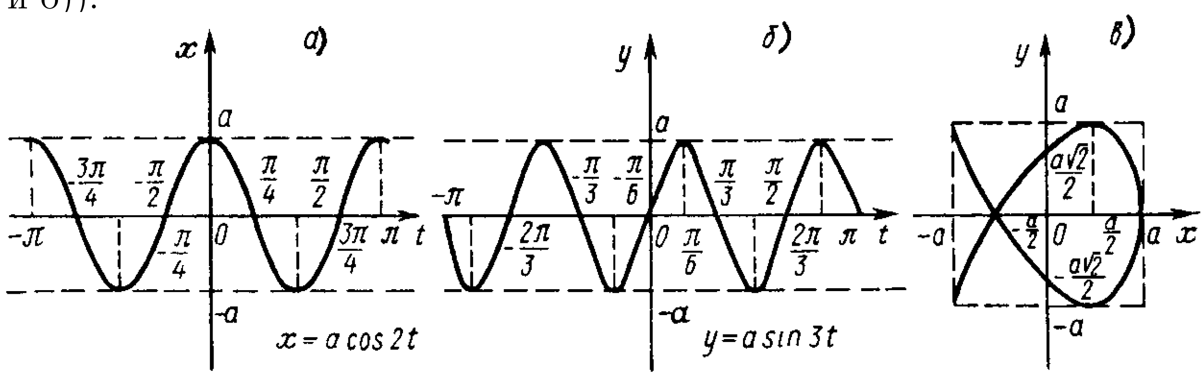
то вместе с точкой $(x_0; y_0)$ на кривой лежат точки $(-x_0; y_0)$ и $(x_0; -y_0)$, то есть она симметрична относительно обеих координатных осей. Пусть t меняется на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Соответствующие точки кривой лежат в первой четверти. Рассмотрим множество точек $\tilde{x} = a\cos^2 t$, $\tilde{y} = a\sin^2 t$. Это отрезок прямой $\tilde{x} + \tilde{y} = a$, лежащий в первой четверти. Так как при любом t, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $x < \tilde{x}$, $y < \tilde{y}$, то исследуемая кривая лежит ниже этой прямой. Эскиз кривой представлен на рисунке в).

Пример 9. Построить эскиз кривой $x = a\cos 2t$, $y = a\sin 3t$, $a > 0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0 + 2\pi); y(t_0 + 2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0); y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке длины 2π. Отметим ещё следующие соотношения:

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t), \quad x(\pi - t) = x(t), \quad y(\pi - t) = y(t).$$

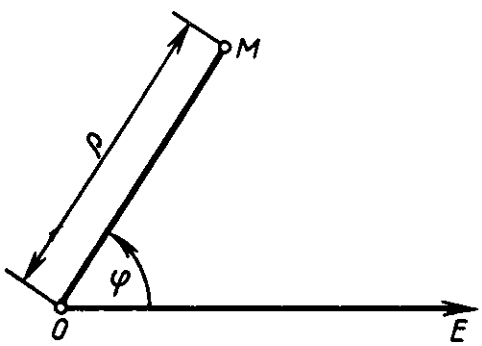
Отсюда следует, что при изменении t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получаются те же точки кривой, что и при изменении t на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, а при изменении t на промежутке $[-\pi; 0]$ получаются точки кривой, симметричные относительно оси Ox с точками, полученными при изменении t на $[0; \pi]$. Таким образом, достаточно рассматривать t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (см. рисунки а) и б)).

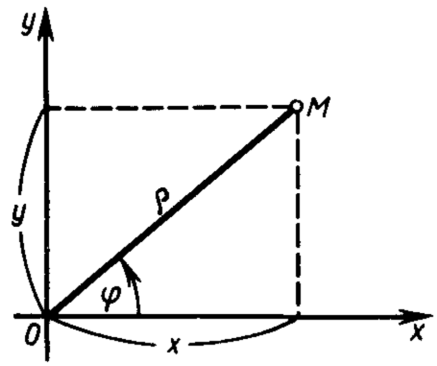


На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $x(t)$ монотонно убывает, следовательно, этому промежутку соответствует одна ветвь кривой. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{6}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0); y(0)) = (a; 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right); y\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{a}{2}; a\right)$. Когда t растёт от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой происходит влево вниз до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right); y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-a; a)$, пересекая ось Oy в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right); y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ и ось Ox в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right); y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{a}{2}; 0\right)$. При дальнейшем росте t от $\frac{\pi}{2}$ до π, как было отмечено выше, точки $(x(t); y(t))$ лежат на той же самой кривой. При изменении t от $-\pi$ до 0 получаем вторую ветвь кривой, симметричную первой ветви относительно оси Ox. Эскиз кривой представлен на рисунке в).

3.5. Полярная система координат. Уравнения кривых в полярной системе координат

Положение точки на плоскости можно определить с помощью полярной системы координат. Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, и выходящего из этой точки луча, называемого полярной осью. Положительными называем углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательными — по часовой стрелке.





Полярными координатами r и φ точки M, не совпадающей с полюсом, называются расстояние r от точки M до полюса O и угол φ от полярной оси до луча OM. Для полюса O полагается, что $r = 0$, а φ неопределён. Полярный угол точки M имеет бесконечно много значений, главным значением угла φ называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Установим связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси Ox совпадает с полярной осью. Тогда, между декартовыми координатами $(x; y)$ точки M и её полярными координатами (r, φ) имеют место соотношения

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

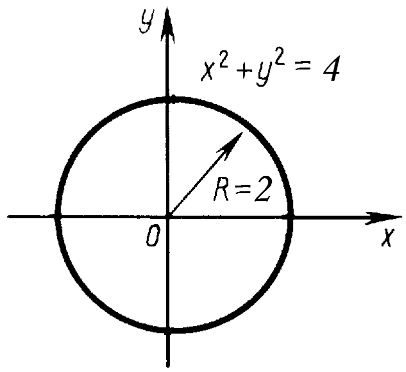
И обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Замечание. Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то угол φ можно найти из условия $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, причём за главное значение φ взять угол из $[0; 2\pi)$ такой, что знак $\sin\varphi$ совпадает со знаком y.

Пример 10. Нарисовать кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = 2$.

Решение. Поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то в декартовой системе координат уравнение имеет вид $2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ или $x^2 + y^2 = 4$ — это уравнение окружности радиусом 2 с центром в точке $(0; 0)$.



Пример 11. Пусть точка $M(x;y)$ имеет декартовы координаты $(-1;1)$. Найти полярные координаты этой точки, если системы совмещены.

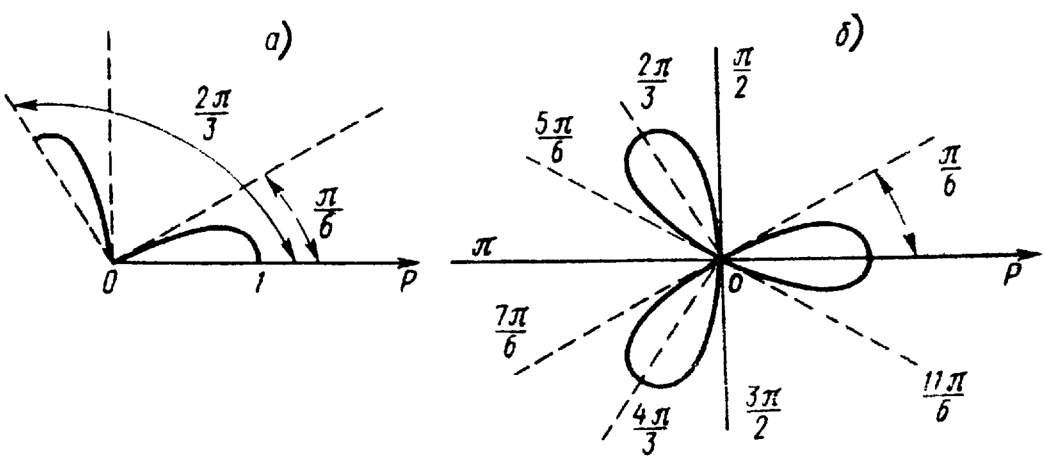
Решение. Вычисляем:

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\quad \cos\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то есть полярные координаты точки M есть $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 12. Нарисовать кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r=\cos 3\varphi$.

Решение. Функция $\cos 3\varphi$ — периодическая, с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{3}$, поэтому достаточно построить кривую для $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{3}$, а затем, используя периодичность, построить её для $\frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi<\frac{4\pi}{3}$ и, наконец, для $\frac{4\pi}{3}\leqslant\varphi<$ $<2\pi$. Построим ту часть кривой, которая расположена в угле $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{3}$. Функция $r=\cos 3\varphi$ на интервале $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ монотонно убывает от 1 до 0; на интервале $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ $r<0$, поэтому нет точек линии, расположенных внутри угла $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{2}$; на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$ кривая монотонно возрастает от 0 до 1. Для $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$ эскиз кривой представлен на рисунке а). Осталось построить кривую в других двух углах: $\frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi<\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}\leqslant\varphi<2\pi$, используя при этом периодичность функции $\cos 3\varphi$. Эскиз кривой приведён на рисунке б).



Пример 13. Определить вид кривой на декартовой плоскости xOy, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $r = \cos\varphi$.

Решение. Поскольку

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то в декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или $x^2 + y^2 = x$, откуда $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, — это есть уравнение окружности радиусом $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Заметим, что из условия $r = \cos\varphi$ следует, что $r^2 = r\cos\varphi$, откуда $x^2 + y^2 = x$.

Задачи для самостоятельного решения

Построить график функции:

128. $y = \frac{x+5}{x+3}$;
129. $y = \frac{5-2x}{x-2}$;
130. $y = \frac{4x+7}{2x-5}$;
131. $y = \frac{9x+4}{3x+2}$;
132. $y = \frac{3-3x}{2-6x}$;
133. $y = \frac{6x-2}{x-1}$;
134. $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$;
135. $y = \sqrt[3]{x(1+x^2)}$;
136. $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2}$;
137. $y = \sqrt[3]{x(2-x^2)}$;
138. $y = 3^{-\frac{1}{x}}$;
139. $y = 2^{2x-x^2}$;
140. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$;
141. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$;
142. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;
143. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$;
144. $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$;
145. $y = 2^{\frac{2-x}{x+1}}$;
146. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x-1}{3x+1}}$;
147. $y = 3^{\frac{x+1}{2x+1}}$;
148. $y = 1 + 3^{\frac{x}{x-1}}$;
149. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$;

150. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x}$;
151. $y = 2^{\sin x}$;
152. $y = 2^{4x - x^2 - 1}$;
153. $y = \log_2(x^2 + 2x)$;
154. $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+2}$;
155. $y = \log_2 \frac{x+4}{2-x}$;
156. $y = \log_3(x^2 - 6x + 5)$;
157. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 4x + 3)$;
158. $y = \log_{\frac{1}{4}}(4x - x^2)$;
159. $y = \log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$;
160. $y = \log_2 |\sin x|$;
161. $y = \log_{\frac{1}{2}} \cos x$;
162. $y = x \sin x$;
163. $y = x + \sin x$;
164. $y = x \sin^2 x$;
165. $y = |x| \sin x$;
166. $y = \arcsin \frac{1}{x}$;
167. $y = \arccos \frac{1}{x}$;
168. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;
169. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$;
170. $y = \arccos \frac{1}{x-3}$;
171. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+2}$;
172. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-1}{x+1}$;
173. $y = \arccos \frac{x}{x+1}$;
174. $y = -2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}$;
175. $y = 2 \arcsin \frac{x}{1-2x}$;
176. $y = \frac{1}{x^2-4}$;
177. $y = \frac{1}{1-x^2}$;
178. $y = \frac{1}{x^2-x}$;
179. $y = \frac{1}{x^3}$;
180. $y = \frac{1}{x^2-4x+1}$;
181. $y = \frac{1}{\log_2(3x+1)}$;
182. $y = \frac{1}{4^{3x-1}+2}$;
183. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1-3x)}$;
184. $y = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(1-4x)}$;
185. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}$;

186. $y = \frac{1}{3^x+3^{-x}}$;
187. $y = \frac{1}{\arcsin(3x+1)}$;
188. $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$;
189. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
190. $y = \frac{1-x^2}{x^2-4}$;
191. $y = \frac{1}{\arccos 2x}$;
192. $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;
193. $y = \log_2 \frac{x^2-1}{x+2}$;
194. $y = x^2 + \frac{1}{x}$;
195. $y = x^3 - \frac{1}{x}$;
196. $y = \frac{1}{\operatorname{arcctg}(x-1)}$;
197. $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2|x|-1}{|x|-2}$;
198. $y = \log_2 \left(\sqrt[3]{x+1} + 1\right)$;
199. $y = |\operatorname{tg} x + 1|$;
200. $y = |x| + \frac{1}{x}$;
201. $y = \sin x + |\sin x|$;
202. $y = \log_{\frac{1}{2}} |x^2 - 3x + 2|$;
203. $y = x^2 - |x| + 3x - 2$;
204. $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 2}$;
205. $y = \frac{1}{|2^{x-1}-1|}$;
206. $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$;
207. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$;
208. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;
209. $x = \frac{1}{\cos^3 t}$, $y = \operatorname{tg}^3 t$;
210. $r = \cos 2\varphi$;
211. $r = 3 \sin 2\varphi$;
212. $r = 4 \cos 3\varphi$;
213. $r = 2 \sin 3\varphi$;
214. $r = a \cos 4\varphi$;
215. $r = a \sin 4\varphi$;
216. $r = a(1 + \cos \varphi)$;
217. $r = 2 + \sin 2\varphi$;
218. $r = 4(1 - \cos \varphi)$;
219. $r = \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$, $\varphi > 1$;
220. $\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}$.

Приложение

Таблица преобразований графика функции	
Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком функции $y = f(x)$
$f(x) + b,\ b \neq 0$	$b > 0 \ \Rightarrow$ сдвиг вверх на b единиц $b < 0 \ \Rightarrow$ сдвиг вниз на $\lvert b\rvert$ единиц
$f(x + a),\ a \neq 0$	$a > 0 \ \Rightarrow$ сдвиг влево на a единиц $a < 0 \ \Rightarrow$ сдвиг вправо на $\lvert a\rvert$ единиц
$kf(x),\ k > 0,\ k \neq 1$	$k > 1 \ \Rightarrow$ растяжение в k раз вдоль оси Oy $0 < k < 1 \ \Rightarrow$ сжатие в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Oy
$f(kx),\ k > 0,\ k \neq 1$	$k > 1 \ \Rightarrow$ сжатие в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox $0 < k < 1 \ \Rightarrow$ растяжение в k раз вдоль оси Ox
$f(-x)$	симметричное отражение относительно оси Oy
$-f(x)$	симметричное отражение относительно оси Ox
$\lvert f(x)\rvert$	1) всё, что ниже оси Ox симметрично отражается наверх; 2) всё, что выше оси Ox (включая точки на оси), остаётся
$f(\lvert x\rvert)$	1) всё, что левее оси Oy, исчезает; 2) всё, что правее оси Oy (включая точку на оси), остаётся; 3) правая часть симметрично относительно оси Oy отражается налево

См. также §2.