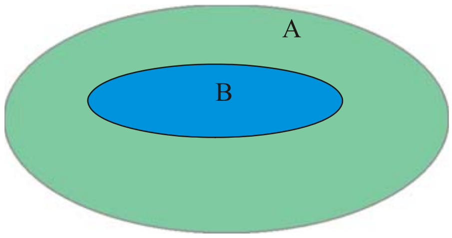
ГЛАВА 1
МНОЖЕСТВА

Понятие множества считается первоначальным неопределяемым понятием. Можно употреблять другие термины, такие как совокупность, семейство и т.д.

Объекты из которых состоит множество называются *элементами множества.*

Если некоторый элемент a принадлежит множеству M, то этот факт записываем в виде $a \in M$.

Если каждый элемент множества B принадлежит и множеству A, то говорят, что множество B является *подмножеством множества* A, и записывают $B \subset A$.



Если каждый элемент множества B принадлежит множеству A и наоборот, каждый элемент множества A принадлежит множеству B (т.е. одновременно $B \subset A$ и $A \subset B$) то множества называются *равными* $A = B$. Другими словами равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$

Способы задания множеств:

- перечисление элементов $M = \{a, b, c, d, e, f\}$;
- указание характеристического свойства $A = \{x | P(x)\}$

Множества бывают конечные и бесконечные. *Конечные* множества состоят из конечного числа элементов.

Множества не являющиеся конечными, называются *бесконечными*.

Логические символы

Квантор общности $\forall$, читается "любой ", "всякий", "каждый". Выражение $\forall x \in M$ читается "для любого x из множества М.

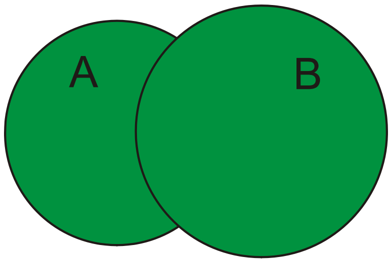
Квантор существования $\exists$ читается "существует", "найдется"

Символ логического следования $\Rightarrow$

Символ эквивалентности $\Leftrightarrow$ обозначает равносильность утверждений.

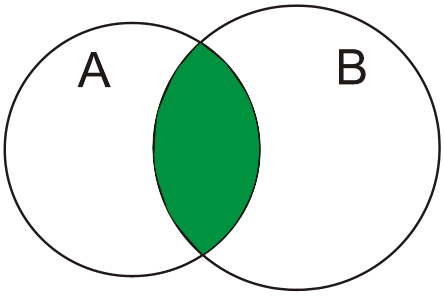
Операции над множествами

Объединение множеств $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.



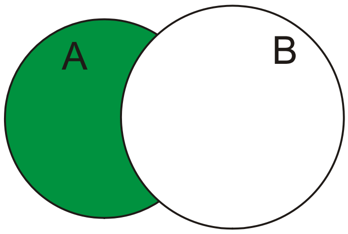
A∪B

Пересечение множеств $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.



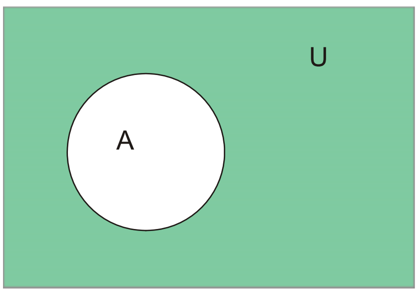
A∩B

Разность множеств $B \setminus A = \{x | x \in B \vee x \notin A\}$.



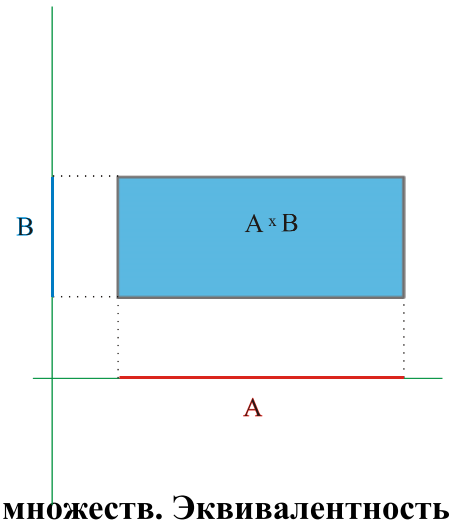
A ∖ B

Дополнение до универсального множества.



U∖A

Декартово произведение множеств $A \times B = \{(x, y) | \forall x \in A \vee \forall y \in B\}$.

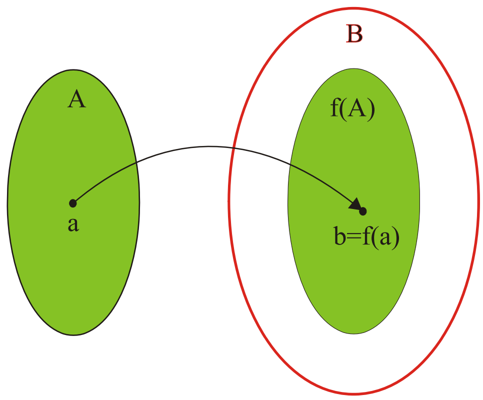


Отображения множеств. Эквивалентность множеств.

Определение Пусть A и B два множества и f- закон (правило) по которому каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$. Тогда говорят, что задано отображение f множества A в множество B. Обозначается

$$f: A \to B.$$

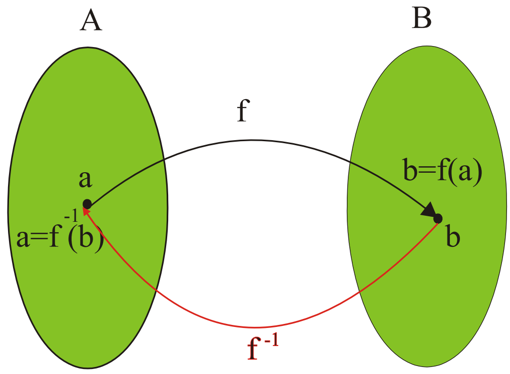
Элемент $b \in B$, в который отображается элемент $a \in A$ называется образом элемента a при отображении f и обозначается $f(a)$. Элемент a при этом называется прообразом элемента b.



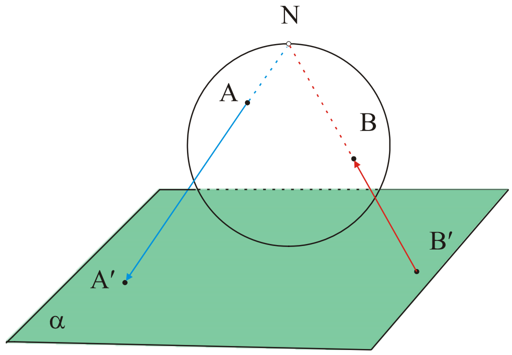
Определение Отображение $f: A \to B$ называется *<u>взаимно</u> <u>однозначным</u>* или *<u>биективным</u>*, если каждый элемент $b \in B$ является образом только одного элемента $a \in A$.

Определение Отображение f^{-1} называют *<u>обратным</u>* к отображению f, если элементу $b \in B$ ставится в соответствие элемент $a \in A$, образом которого при отображении f является b:

$$f^{-1}: B \to A \Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A: a = f^{-1}(b).$$



Определение Два множества А и В называются *эквивалентными* *(Равномощными)***,** если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое. Обозначение: $A \sim B$



Примером двух эквивалентных множеств является взаимно-однозначное соответствие, устанавливающее соответствие между точками сферы (без северного полюса) и плоскости с помощью «стерео графической проекции».

Числовые множества

Множество натуральных чисел.

$$N = \{1,2,3,...\}.$$

Свойства этого множества

- Сумма и произведение двух натуральных чисел являются натуральными числами.

- Операции вычитания и деления на множестве натуральных чисел не выполнимы.

И некоторые другие.

Определение Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется счетным множеством.

Множество целых чисел Z. Объединение натуральных чисел, чисел им противоположных и нуля составляет *множество целых чисел* **Z**

$$Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

Свойства:

1) $N \subset Z$;
2) **Z** счетно и бесконечно;
3) **Z** упорядоченно;
4) В множестве **Z** определены операции: сложения, умножения и вычитания.

На множестве **Z** не определена операция деления.

***Множество рациональных чисел* Q.** Множество чисел вида p/n, где $p \in Z, n \in N$ является множеством *рациональных чисел* **Q.**

Свойства:

1) $N \subset Z \subset Q$.
2) Множество *рациональных чисел* **Q** счетно и бесконечно.
3) Множество *рациональных чисел* **Q** упорядоченно.
4) Любое рациональное число может быть записано в виде конечной или периодической дроби.
5) Множество *рациональных чисел* **Q** плотно, т.е. для любых q_1 и q_2 найдется число q, такое, что $q_1 < q < q_2$.
6) $\forall q_1, q_2 \in Q: q_1 < q_2 \exists n \in N: nq_1 > q_2$ (аксиома Архимеда).
7) На множестве Q определены 4 арифметические действия (кроме деления на ноль).

Любое рациональное число можно изобразить точкой на числовой прямой. Но возникает проблема представления иррациональных чисел.

***Множество действительных чисел* R.** Объединение рациональных и иррациональных чисел образует *множество действительных чисел.*

Свойства совпадают со свойствами рациональных чисел, но существует взаимно - однозначное соответствие с точками числовой прямой.

Рассмотрим определения следующих промежутков :

1) *интервал с концами a и b:*

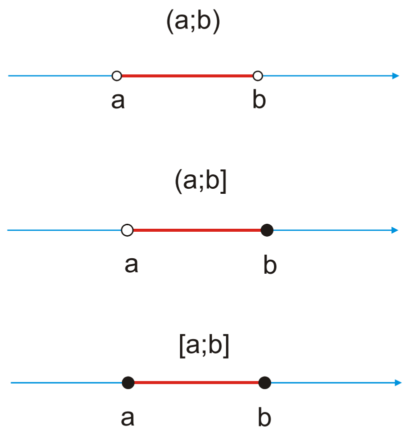
$$(a,b) = \{x \in R | a < x < b\}.$$

2) *отрезок с концами a и b :*

$$[a,b] = \{x \in R | a \le x \le b\}.$$

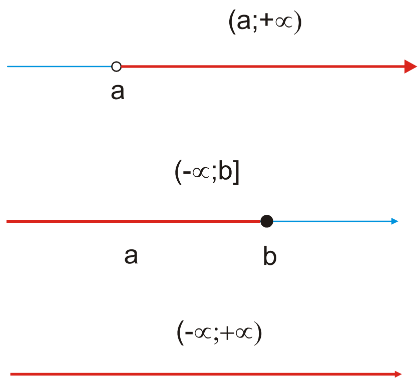
3) *полуинтервалы :*

$$[a,b) = \{x \in R | a \le x < b\},\ (a,b] = \{x \in R | a < x \le b\}.$$



Интервалы и полуинтервалы могут быть бесконечными

$$(a,\infty)=\{x\in R|a<x\},\ [a,\infty)=\{x\in R|a\le x\}$$



Абсолютная величина (модуль) действительного числа.

Определение *Абсолютной величиной (модулем) действительного числа* ***x*** *называется*

$$|x|=\begin{cases}x,\forall x\ge 0,\\ -x,\forall x<0.\end{cases}$$

Свойства абсолютной величины числа

1. $|x|\ge 0$.
2. $|x|=|-x|$.
3. $-|x|\le x\le |x|$.
4. $\forall\varepsilon>0: |x|\le\varepsilon\Leftrightarrow -\varepsilon\le x\le\varepsilon$.
5. $|x+y|\le |x|+|y|, \forall x,y\in R$

Действительно, в силу свойства 3, $-|x|\le x\le |x|$, $-|y|\le y\le |y|$. Сложив почленно эти неравенства получим :

$$-(|x|+|y|)\le x+y\le |x|+|y|$$

Согласно свойству 4 полученное двойное неравенство означает

$$|x+y|\le |x|+|y|.$$

6. $|x-y| \geq |x|-|y|, \forall x, y \in R$

$\triangleright$ $x = y + (x-y) \Rightarrow |x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$. Из последнего неравенства и следует $|x-y| \geq |x|-|y|$. $\triangleleft$

7. $\forall x, y \in R: |xy| = |x| \cdot |y|, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА, ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Определение *Множество действительных чисел А называется ограниченным сверху, если существует такое действительное число М такое, что каждый элемент* **x** *множества А удовлетворяет неравенству*

$$x \leq M$$

При этом число М называется <u>верхней гранью множества</u> А.

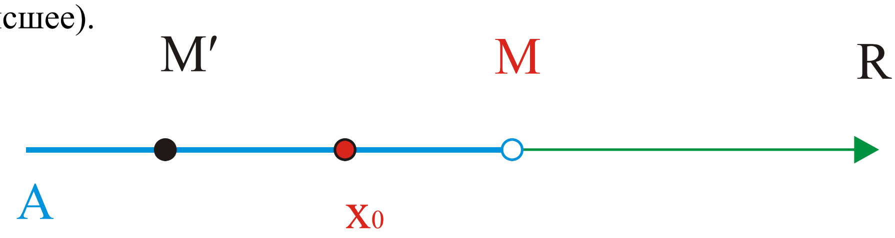
Аналогичное определение ограниченного снизу множества и нижней грани.

Определение *Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества $A \subset R$ называется <u>точной верхней гранью.</u>*

Другими словами М является точной верхней гранью множества $A \subset R$, если

$$\forall x \in A: x \leq M \text{ и } \forall M' < M \, \exists x_0 \in A, x_0 > M'.$$

Точную верхнюю грань обозначают $M = \sup A$ (от латинского supremum - наивысшее).

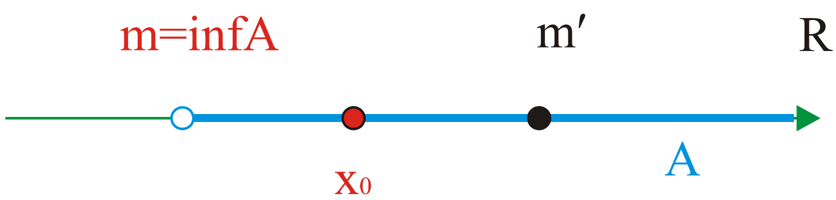


Определение *Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset R$ называется <u>точной нижней гранью.</u>*

Другими словами m является точной нижней гранью множества $A \subset R$, если

$$\forall x \in A: x \geq m \text{ и } \forall m' > m \, \exists x_0 \in A, x_0 \leq m'.$$

Точную верхнюю грань обозначают $m = \inf A$ (от латинского infimum - наинизший).



Определение *Множество, ограниченное сверху и снизу называется ограниченным.*